Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta

DISERTAČNÍ PRÁCE

2015 Jiří Přibyl

Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta

DISERTAČNÍ PRÁCE

Řešení matematických úloh na druhém stupni ZŠ pomocí heuristických strategií

Heuristic strategies of mathematical problem solving on lower secondary school

Jiří Přibyl

Vedoucí práce: PhDr. Filip Roubíček, Ph.D.
Studijní program: Pedagogika
Studijní obor: Didaktika matematiky

2015

Prohlašuji, že jsem disertační práci na téma *Řešení matematických úloh na druhém stupni ZŠ pomocí heuristických strategií* vypracoval pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze, dne 7. 12. 2015

Jiří Přibyl

In this work, when it shall be found that much is omitted, let it not be forgotten that much likewise is performed.

Samuel Johnson

Rád bych na tomto místě poděkoval celé řadě lidí, bez jejichž přispění a podpory by tato práce nikdy nevznikla. Na prvním místě děkuji svému školiteli a mohu-li říci i příteli PhDr. **Filipu Roubíčkovi**, Ph.D., který mne po celou dobu doprovázel a osvětloval mi cestu. Není-li vidět na cestu, pak obvykle tápeme. Dále děkuji konzultantovi prof. RNDr. **Janu Kopkovi**, CSc., který mi byl k dispozici, kdykoliv to bylo zapotřebí. Také děkuji jak svému příteli a kolegovi doc. PaedDr. **Petru Eisenmannovi**, CSc. a tak i prof. RNDr. **Jarmile Novotné**, CSc., kteří mi umožnili spolupracovat s nimi a nahlédnout do úžasného světa vědy.

Pracovní kolektiv, který vytvářel tvůrčí prostředí, byl však mnohem větší. Rád bych touto cestou poděkoval všem členům týmu, kteří se podíleli na řešení projektu: Mgr. Jiřímu Břehovskému, Ph.D., PhDr. Jiřímu Burešovi, Ph.D., Mgr. Haně Novákové, Ph.D., Mgr. Jiřině Ondrušové a PaedDr. Milanu Zelenkovi.

Rád bych také poděkoval Mgr. **Stanislavě Kaiserové**, která pečlivě pročetla rukopis a výraznou měrou se podílela na jeho zlepšení.

Největší poděkování však patří mé ženě **Pavlíně**, která mne po celou dobu podporovala a umožňovala mi pracovat, ačkoliv v té době jsem asi nebyl dobrým manželem a ani otcem. Děkuji.

Budou-li v práci shledány určité nedostatky, pak je tomu tak navzdory úsilí výše uvedených lidí.

Práce byla podpořena projektem Grantové agentury ČR P407/12/1939.

ABSTRAKT

Autor v předkládané práci nahlíží problematiku řešení úloh na druhém stupni základní školy prismatem heuristických strategií. Cílem práce je uceleným způsobem shrnout výsledky výzkumné činnosti, která započala roku 2012 a probíhá až dosud.

Dosažené výsledky se dotýkají jak teoretické oblasti, tak i praktického výzkumu, který byl realizován v 15 třídách základních škol a gymnázií. V teoretické části autor představuje trojrozměrnou klasifikaci užití heuristických strategií a strukturu vlastností heuristických strategií. Nedílnou součástí je také přehled různých vnímání pojmů matematická úloha a řešení úlohy. V závěru práce pak autor uvádí přehled heuristických strategií, které byly testovány ve výukových experimentech, přičemž každá strategie je důkladně popsána a ilustrována vhodnou úlohou.

Experimentální část práce pak shrnuje výsledky krátkodobých výukových experimentů (každý byl tříměsíční) a dlouhodobého výukového experimentu (16 měsíců) a mimo jiné zodpovídá i tyto otázky: „Existují strategie, které jsou naučitelné v krátkém časovém úseku?“, „Existují strategie, které jsou vhodné pro běžného žáka?“, nebo „Existují strategie, které žáci objevují přirozeně?“.

KLÍČOVÁ SLOVA

Matematická úloha, metody řešení matematických úloh, heuristické strategie, kultura řešení problému žákem.

ABSTRACT

The dissertation thesis deals with mathematical problem-solving at lower secondary level, as viewed from the perspective of heuristic strategies. The aim of the thesis is to comprehensibly summarize the results of research which began in 2012 and runs until now.

The results concern both with theoretical and empirical parts of our research. This research study was conducted in fifteen lower secondary and upper secondary classes. Three dimensional classification of use of heuristic strategies and the structure of heuristic strategies' characteristics were developed by the author, and these constructs are presented in this work. The theory of mathematical problem and mathematical problem solving method is an integral part of this thesis too. Furthermore, the author presents a summary of all strategies used in the experiments; each strategy is fully described and illustrated by an appropriate example.

The results of several short-term research studies (three months) and a longitudinal research study (sixteen months) are analysed in the empirical part of the thesis. This part also strives to find answers to several research questions, e.g.: „Could certain strategies be taught in a short-term period (three months)?“, „Which strategies are suitable for an average pupil?“ or „Are the pupils able to spontaneously discover certain strategies?“

KEYWORDS

Mathematical problem, methods of mathematical problem solving, heuristic strategy, culture of problem solving by pupil.

Řešení matematických úloh na druhém stupni ZŠ pomocí heuristických strategií

Jiří Přibyl

Obsah

Úvod

Umění řešit úlohy je jádrem matematiky.

Wilson, Fernandez a Hadaway, 1993, s. 66

Matematická úloha jako taková je v ohnisku zájmu matematiků již od pradávna (např. Rhindův papyrus), avšak systematický přístup k procesu řešení úloh (problémů) se objevuje až v průběhu minulého století. Na svém počátku byl tento proces doménou především matematiků, ale v dnešní době již bylo nemálo vykonáno i na poli didaktiky matematiky.

Soudobá didaktika matematiky stojí (i nadále) před nelehkým úkolem zpřístupnit matematiku žákům a studentům tak, aby pochopili její podstatu, která nespočívá ve znalosti vzorců a v algoritmickém procvičování, ale v určité kultivaci myšlení a kultivaci dovednosti řešit problémové situace.

Každý, kdo se výukou matematiky zabývá, se jistě během své praxe setkal či setká s otázkami po smyslu a podstatě matematiky. Vycházeje z motta si dovoluji nabídnout určitý pohled na problematiku řešení úloh ve školské praxi. Sám vnímám řešení úloh jako těžiště rovnostranného trojúhelníku, jehož vrcholy tvoří matematici, didaktici matematiky a společnost, ve které působí. Z každé skupiny jsem vybral zástupce a je nechal se vyjádřit k základní otázce. Jsem si vědom toho, že cokoliv bych sám napsal, by bylo v tuto chvíli jejich pouhou parafrází.

Známý matematik P. Halmos si též položil následující otázku. „*V čem je skutečné jádro matematiky? V axiómech (jako je postulát o rovnoběžkách)? Ve větách (jako je základní věta algebry)? V důkazech (jako je Gödelův důkaz nerozhodnutelnosti)? V pojmech (jako jsou množiny a třídy)? V definicích (jako je Mengerova definice dimenze)? V teoriích (jako je teorie kategorií)? Ve vzorcích (jako je Cauchyův intergrální vzorec)? V metodách (jako je metoda postupných aproximací)?*“ (Halmos, 1982, s. 273) Odpověď, kterou nabízí, plně koresponduje s mojí představou. „*Matematika by jistě nemohla existovat bez těchto součástí, jsou všechny podstatné. Nicméně já si vážně myslím, že žádná z nich není jádrem matematiky, že hlavní oprávnění matematikovy existence je v řešení problémů*[1]*, a že tedy skutečným jádrem matematiky jsou problémy a jejich řešení.*“ (Halmos, 1982, s. 273) Důležitost úlohy pro matematiku samotnou zmiňuje i T. Tao, jenž je považován za jednoho z největších matematiků dnešní doby. „*Matematické úlohy – nebo hádanky – jsou důležité pro skutečnou matematiku (stejně*

[1] V citacích obvykle autor slovem „problém“ rozumí to, co já vymezuji jako „matematická úloha“.

jako řešení problémů z praxe), jako jsou bajky, příběhy a anekdoty důležité pro mladé lidi, aby porozuměli skutečnému životu.“[2] (Tao, 2006, s. viii)

O důležitosti řešení úloh v matematice se zmiňuje Rámcový vzdělávací program pro ZV, který upozorňuje na skutečnost, že řešení úloh (problémů) se má táhnout jako nit celým vzděláváním. „*Důležitou součástí matematického vzdělávání jsou Nestandardní aplikační úlohy a problémy, jejichž řešení může být do značné míry nezávislé na znalostech a dovednostech školské matematiky, ale při němž je nutné uplatnit logické myšlení. Tyto úlohy by měly prolínat všemi tematickými okruhy v průběhu celého základního vzdělávání. Žáci se učí řešit problémové situace a úlohy z běžného života, pochopit a analyzovat problém, utřídit údaje a podmínky, provádět situační náčrty, řešit optimalizační úlohy. Řešení logických úloh, jejichž obtížnost je závislá na míře rozumové vyspělosti žáků, posiluje vědomí žáka ve vlastní schopnosti logického uvažování a může podchytit i ty žáky, kteří jsou v matematice méně úspěšní.*“ (Jeřábek, Lisnerová, Smejkalová a Tupý, 2013, s. 26) Jedním ze způsobů, jak toho dosáhnout je: „*Provádění rozboru problému a plánu řešení, odhadování výsledků, volbě správného postupu k vyřešení problému a vyhodnocování správnosti výsledku vzhledem k podmínkám úlohy nebo problému.*“ (Jeřábek, Lisnerová, Smejkalová a Tupý, 2013, s. 27)

I v zemích, kde řešení úloh je běžnou součástí vzdělávání matematice jako specifický tematický okruh, je základními dokumenty upozorňováno na nevhodné zařazování této partie jako samostatné části. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) uvádí, že „*Řešení úloh je nedílnou částí výuky matematiky a nemělo by tak tvořit osamocenou oblast školního (rámcového) vzdělávacího programu.*“[3] (NCTM, 2000, s. 52) Mimo jiné se také vyjadřuje k postavení řešení úloh vůči školské matematice a znovu tak zdůrazňuje nezbytnost zařazování vhodných úloh. „*Řešení úloh je úhelným kamenem školské matematiky. Bez dovednosti řešit úlohy je užitečnost a síla matematických myšlenek, znalostí a dovedností výrazně omezena.*“[4] (NCTM, 2000, s. 182)

Dva velcí, původem maďarští, matematici se zabývali otázkou, zda řešení (obtížnějších) úloh je výsadou pouze určité skupiny matematicky nadaných lidí. V odpovědích na tuto otázku je patrno, že nezastupitelnou roli hraje učitel a školní vzdělávání jako takové. P. Halmos to dokládá následovně: „*Pevně věřím, že problémy jsou jádrem matematiky, a doufám, že je budeme prosazovat stále více a více jako učitelé v učebnách, na seminářích, v knihách a článcích, a že vypěstujeme z našich studentů lepší autory a řešitele problémů, než jsme my sami.*“ (Halmos, 1982, s. 280) G. Pólya, který se problematice řešení úloh aktivně věnoval, přišel s myšlenkou, že řešení matematických úloh je proces, kterému se mohou žáci aktivním tréninkem naučit. „*Řešení úloh je praktickou dovedností stejně jako, například, plavání. Praktické dovednosti pak získáváme nápodobou a procvičováním.*“[5] (Pólya, 2004, s. 4) Tím pozměnil premisu, že řešení náročnějších problémů je pouze pro některé jedince.

[2] Mathematical problems, or puzzle, are important to real mathematics (like solving real-life problems), just as fables, stories, and anecdotes are important to the young in understanding real life.

[3] Problem solving is an integral part of all mathematics learning, and so it should not be an isolated part of the mathematics program.

[4] Problem solving is the cornerstone of school mathematics. Without the ability to solve problems, the usefulness and power of mathematical ideas, knowledge, and skills are severely limited.

[5] Solving problems is a practical skill like, let us say, swimming. We acquire any practical skill by imitation and practice.

V dnešní době se velmi často hovoří o různých kompetencích, které rozvíjí škola. Nemělo by však dojít k tomu, že začneme hovořit o „umění řešit úlohy“ nebo o „schopnosti řešit úlohy“, aniž dáme těmto slovním obratům konkrétní obsah. Na toto nebezpečí upozorňuje nejen O. Rey, když říká, že *„umět vyřešit kvadratickou rovnici, to je kompetence. Umět řešit problémy – to není žádná kompetence, to je prázdná floskule … nanejvýš může jít o spekulaci psychologů. Avšak současný stav empirických výzkumů nedovoluje takovou spekulativní konstrukci jakkoli potvrdit*“ (Rey, 1996, s. 87 citovaný Štechem, 2013, s. 629), ale i S. Štech, který poukazuje na skutečnost, že problémové vyučování, pokud není doprovázeno i jinými formami vzdělávání, není tou nejvhodnější cestou. *„Pokud jde o předpoklad, že zaměření vyučování na vyšší kognitivní formy učení, jako je řešení problémů, představuje nejefektivnější metodu vyučování, většina výzkumů již od Thorndika to vyvrací.*“ (Štech, 2013, s. 626)

Uzavřeme tuto pasáž slovy F. Kuřiny – didaktika matematiky, který se sledovanou problematikou dlouhodobě zabývá. *„Základním problémem práce školy je podle mého názoru motivace a řešení úloh. Mají-li se žáci něčemu naučit, musí se chtít učit. Nejdůležitější školská činnost je řešení úloh.*“ (Kuřina, 2003b, s. 130)

Nejen na základě osobní zkušenosti s řešením úloh, ale i na základě pozorování žáků (na ZŠ i SŠ) a studentů se domnívám, že úlohy samy o sobě mají velký potenciál oslovit početnou skupinu žáků a studentů nezávisle na škole, kterou aktuálně studují. Domnívám se, a moje praxe to potvrzuje, že pro každého žáka či studenta existuje matematická úloha, která jej osloví a poodkryje mu určitou část matematiky.

Řešení úloh jako takové přináší poměrně silné uspokojení tomu, kdo je řeší. Nejen vyřešená úloha, ale v řadě případů i samotný proces řešení dokáže u žáka či studenta navodit motivaci zaujetím (*flow motivation*), která mu pak usnadní další řešení úloh a studium matematiky jako takové. Řada úloh má snadno pochopitelné, krátké a atraktivní zadání, které je řešitelné prostředky matematiky základní školy. Přesto i taková úloha dokáže poskytnout přemýšlivému žákovi zábavu na několik hodin. Praxe také ukázala, že úlohy se velmi dobře řeší v dialogu, kdy právě možnost promluvit si s někým o daném problému může žákovi pomoci získat vhled do úlohy. Rád bych, aby žáci chápali své učitele jako vhodné partnery k rozhovoru, neboť učitelův rozhled v matematice obvykle přesahuje žákův a učitel vhodnou nápovědou, aniž prozradí způsob řešení, může žákovi „rozšířit obzory“.

Řada výsledků, které předkládám ve své práci, jsou výsledkem práce celého týmu. Experimenty, které jsme provedli, byly podpořeny Grantovou agenturou České republiky (dále jen GA ČR) – projektem P407/12/1939 *Rozvíjení kultury řešení matematických problémů ve školské praxi* (2012–2014).

Na tomto místě bych ještě jednou rád poděkoval všem členům řešitelského týmu, že mi umožnili být jeho součástí.

Cíle práce

Tisíce cest vede k jednomu cíli.

Jules Verne

Ve své práci, která je věnována problematice řešení úloh (nejen) na základní škole v českém prostředí, sleduji celou řadu cílů. Tyto cíle se vztahují jak k části teoretické, tak k části metodologické a experimentální.

V prvé řadě musím předeslat, že v teoretické části práce čerpám z poznatků jiných autorů. Původním východiskem jsou práce G. Pólyi (2004; 1981) a J. Kopky (1999; 2013). Tento základ jsem později rozšířil o práce G. Brousseaua (2002; 2012), H. A. Simona a A. Newella (1958; 1971), A. H. Schoenfelda (1985; 1992) a R. Sternberga (2002). Každý z autorů nahlíží řešení úloh jiným pohledem, dává důraz na jiné aspekty procesu řešení úloh (problémů).

Práce výzkumného týmu již dříve zmíněného projektu GA ČR významně ovlivnila vytyčení cílů práce, neboť v rámci tohoto projektu byly formulovány cíle, které jsou relevantní i pro tuto práci. Některé výsledky, kterých bylo dosaženo činností týmu, přejímám pro potřeby této práce.

Na základě studia literatury, osobní zkušenosti a práce v týmu jsme si při řešení projektu položili následující otázky:

- Existují heuristické strategie, které jsou naučitelné v krátkém časovém úseku (cca 3 měsíce)?
- Existují heuristické strategie, které jsou vhodné pro běžného žáka, tj. žáka, který se nezúčastňuje matematických soutěží, a umožní mu řešit širší škálu úloh?
- Existují heuristické strategie, které není možné zařadit do běžné výuky matematiky na základní škole?
- Existují heuristické strategie, které žáci objevují přirozeně?

Za účelem zodpovězení uvedených otázek bylo potřeba specifikovat dílčí cíle, jejich dosažením jsme získali potřebné prostředky pro zkoumání dané problematiky:

- Provést klasifikaci heuristických strategií z vnějšího hlediska. Tento cíl vedl k zavedení pojmu *užití heuristických strategií.*
- Provést klasifikaci heuristických strategií z vnitřního hlediska. Tento cíl vedl k popisu vlastností heuristických strategií.

- Najít/vytvořit nástroj, který by umožnil popsat žákovu dovednost řešit úlohy. Tento cíl vedl k vytvoření nástroje *kultura řešení problému žákem* (dále jen KRP).

Pro samotné experimenty jsme rozšířili otázky o následující:

- Jak budou žáci úspěšní při řešení úloh, použijí-li heuristické strategie?
- Změní se některé položky KRP u žáků v závislosti na účasti v experimentu?

Pro hlavní experiment jsme stanovili následující hypotézy:

1. Po proběhnutí dlouhodobého experimentu budou žáci schopni ve větší míře aktivně užívat heuristické strategie při řešení úloh.
2. Po proběhnutí dlouhodobého experimentu budou mít žáci lepší výsledky ve všech položkách KRP (vyjma inteligence).

Cílem mé práce bylo podpořit zmíněný výzkum, proto jsem se ve své práci kromě výše uvedených cílů dále zabýval následujícími cíli:

- Vymezit pojem úloha v kontextu užití heuristických strategií řešení úloh a provést syntézu různých přístupů vzhledem ke zkoumané problematice.
- Sjednotit vymezení jednotlivých heuristických strategií řešení úloh z hlediska teoretických východisek, terminologie a sledovaných charakteristik.
- Charakterizovat jednotlivé heuristické strategie řešení úloh z různých úhlů pohledu, zejména popsat sledované vlastnosti strategií (vnitřní hledisko klasifikace) a jejich užití (vnější hledisko klasifikace).
- Na základě realizovaných experimentů zhodnotit implementaci heuristických strategií do výuky z hlediska kultury řešení problému žákem.

Dlouhodobým cílem, který sleduji, je zlepšit dovednost žáků řešit matematické úlohy, v jejich řešení nalézat radost a pozměnit náhled společnosti, že matematika (a řešení úloh) je doménou několika nadaných jedinců.

Kapitola 1

Základní vymezení pojmů

> Only in math problems can you buy 60 cantaloupes and no one asks what the hell is wrong with you.
>
> Sally Brown

Cílem této kapitoly je vymezit klíčové pojmy, které tvoří základ celé práce. Stěžejním pojmem je *matematická úloha* a od něj se odvíjející pojmy *řešení úlohy* a *heuristická strategie.* Důraz je přitom kladen především na pojem úloha, který je pro správné pochopení obsahu následujících kapitol podstatný. Z jeho vymezení vycházejí formulace dalších dvou pojmů.

1.1 Úloha

V první části se zabývám vymezením pojmu *úloha* v kontextu různých přístupů a pohledů a odkazuji na práce některých matematiků, kteří se problematice úloh a jejich řešení věnovali, stejně tak na práce didaktiků matematiky, kteří tuto problematiku sledují z pohledu matematického vzdělávání. Mezi činitele, které mají vliv na vymezení pojmu, patří dobový kontext, didaktický směr, k němuž se autor hlásí, účel, který autor sleduje, a jazyk. Ve druhé části uvádím vymezení pojmu tak, jak je chápáno a používáno v této práci.

Přejímání zahraničních prací vnáší do odborné rozpravy cizí slova i v případech, kdy to vhodné není. Český termín *úloha* je často nahrazován slovem problém (z angl. *problem*), čímž dochází k posunu významu těchto slov a k nesouladu v odborné terminologii. Na místo slova *úloha* někteří autoři používají výrazy *problém*, *problémová situace*, *problémová úloha*, *cvičení*, *příklad* jako synonyma, ačkoliv, jak uvádím dále, mají v didaktickém nazírání zcela jiný význam. Tato terminologická nejednotnost je dlouhodobým problémem, na který dříve poukazoval J. Mareš (1980) a nyní F. Kuřina (2011).

S ohledem na zkoumanou problematiku řešení úloh používám v práci slovo řešitel, jímž nazývám toho, kdo řeší úlohu. Blíže nespecifikuji požadavky na takovou osobu (může jí být žák, student, učitel aj.), ale v této práci budu považovat za řešitele vždy žáka. V případě, že by tomu bylo jinak, explicitně to uvedu.

1.1.1 Různá vymezení a klasifikace úloh

V základních dokumentech školské matematiky zpracovaných Českou terminologickou komisí pro matematiku JČMF, jako jsou Slovník školské matematiky (1981) a Názvy a značky školské matematiky (1988), nejsou termíny *úloha* a *problém* blíže vymezeny. Druhý ze zmíněných dokumentů se sice vyjadřuje k pojmu *úloha*, avšak jen z pohledu lineárního programování ve smyslu minimalizační, maximalizační, optimalizační, degenerované, dopravní a přiřazovací úlohy, nebo z pohledu geometrie jako polohové (nepolohové) konstrukční úlohy.

Dále uvedený přehled ukazuje různorodost pohledů na pojem úloha a také nesoulad v terminologii, který dle mého názoru znesnadňuje uchopení pojmu úloha a orientaci v problematice řešení úloh. Domnívám se, že každý z autorů akcentuje jinou stránku daného pojmu, avšak pro potřeby své práce jsem se pokusil nahlédnout danou problematiku v celé její šíři. Porovnání různých přístupů mi umožnilo ujasnit si aspekty tohoto pojmu a pro potřebu disertační práce přijmout jednoznačné vymezení.

Určitým východiskem byla práce J. Mareše (1980), který prezentoval Fridmanovu teorii učebních úloh. L. M. Fridman se pokusil vypracovat exaktní teorii učebních úloh z pedagogicko-psychologického pohledu. J. Mareš v (1980) uvádí Fridmanovo vymezení úlohy a problémové situace.

„*Úloha vzniká tehdy, když se subjekt ve své činnosti (zaměřené na určitý objekt) setkává s určitou obtíží, překážkou. Tuto obtíž si uvědomí a hledá způsob, jak ji odstranit. Právě popsanou situaci nazývá autor problémovou situací. Jakmile tuto situaci navodíme záměrně, „uměle“, rodí se úloha. Úloha je model problémové situace fixovaný v jistém jazyce.*“ (Mareš, 1980, s. 596)

J. Mareš poukazuje na dvojí přístup k problematice úloh. V prvním přístupu je řešitel součástí úlohy – „*bez subjektu úloha neexistuje*“ (s. 596), ve druhém případě je úloha svébytným útvarem, který existuje bez řešitele – k tomuto stanovisku se kloní Fridman. Vzhledem k tomu, že zaujímám stanovisko, že úloha vystupuje v různých rolích, odklonil jsem se od Fridmanova pedagogicko-psychologického přístupu k pojmu úloha. Přesto se budu v této části textu k Fridmanově teorii vracet, jelikož určité pohledy a vymezení se dají s úspěchem aplikovat i na moje pojetí pojmu úloha.

Následující přehled různých vymezení pojmu *úloha* si neklade za cíl úplnost a obsahuje pouze vymezení, která jsem ve své práci přímo využil, případně poukazuje na oblast, jíž se cíleně nevěnuji. V řadě případů dochází k překrývání vymezení pojmů jednotlivých autorů. V těch případech, kde jejich vymezení odpovídá požadovanému účelu, tuto skutečnost zmiňuji. V ostatních případech uvádím pouze tu část, kterou se významně liší od ostatních. Skutečnost, že v přehledu nejsou zmíněny všechny práce zabývající se zkoumanou problematikou, neznamená jejich opomenutí. V některých z nich není pojem úloha stěžejní nebo se odvolávají na jiné práce, případně uvedené vymezení je pro potřeby této práce zcela bezpředmětné (např. sociální role úlohy v kolektivu).

Přehled jednotlivých vymezení se také nevěnuje účelově pojatým specifikacím úloh, které jsou obvykle vymezeny přívlastkem, jako je například významná, maturitní, zajímavá apod.

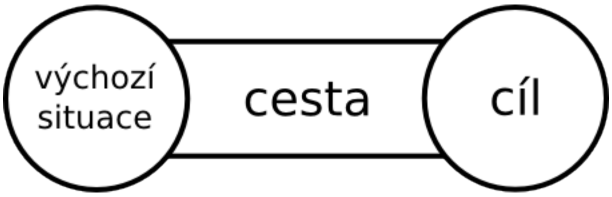
V rámci jednotlivých vymezení se budu držet pojmu, který užívá zmiňovaný autor, a na tuto skutečnost upozorním. Obvykle bude docházet k záměně slov „problém“

a „úloha“. Činím tak z toho důvodu, abych nepřechyloval autorovu terminologii ke své tam, kde to není nezbytně nutné.

Cvičení – úloha – problém

V rámci řešení grantového projektu jsme přejali terminologii J. Kopky a ta se také stala prvotním východiskem mé práce.

J. Kopka ve svých pracích (1999; 2013) používá slovo *problém* jako pojem vymezený vnitřní strukturou situace. Následující schéma ilustruje toto vymezení (viz obr. 1.1).



Obrázek 1.1: Schematické znázornění procesu řešení

V pojetí J. Kopky (1999) je problém chápán jako trojsložková struktura, jež tento pojem jednoznačně vymezuje a která se skládá z následujících složek:

- *výchozí situace*, v níž popisujeme souvislosti a poskytujeme informace;
- *cíl*, kterého chce řešitel dosáhnout;
- *cesta* od výchozí situace k cíli, která pro řešitele může, ale také nemusí být zřejmá či dosažitelná.

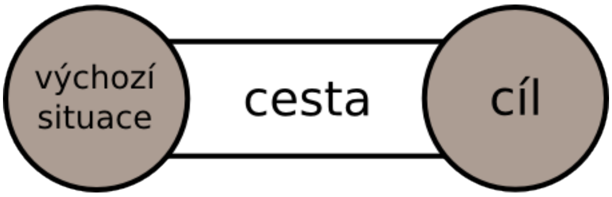
V závislosti na tom, které složky známe, vymezuje J. Kopka tři druhy problémů:

1. *cvičení* (rutinní problémy);
2. *úlohy* (nerutinní problémy);
3. *zkoumání*.

Cvičení charakterizuje jako situaci, kdy řešitel zná všechny tři složky. Schematicky to znázorňuje obrázek 1.2.

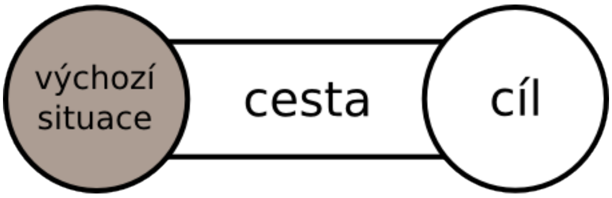
Obrázek 1.2: Cvičení

Úlohu charakterizuje jako situaci, kdy řešitel zná výchozí situaci a cíl, avšak cesta k dosažení cíle mu není známa. Schematicky to znázorňuje obrázek 1.3.



Obrázek 1.3: Úloha

Zkoumání charakterizuje jako situaci, kdy řešitel zná výchozí situaci, ale cíl, natožpak cesta, mu nejsou známy. Schematicky to znázorňuje obrázek 1.4.



Obrázek 1.4: Zkoumání

Postavení řešitele není v práci J. Kopky zdůrazňováno, neboť se zaměřuje pouze na problémy (dle jeho terminologie). Domnívám se, že uchopení problému interaguje s řešitelem a zatímco pro jednoho žáka je problém cvičením, pro druhého je úlohou. Na základě osobní zkušenosti vím, že ten samý problém je pro některé z žáků zkoumáním. Je možné vymezit takové problémy, které budou pro většinu žáků úlohami či zkoumáními – typicky jde o problémy z různých matematických soutěží.

Řada didaktiků též používá toto rozdělení, i když jednotlivé typy problémů nazývá jinak. F. Kuřina na rozdíl od J. Kopky místo pojmu problém užívá pojem úloha, a ten vymezuje následovně:

„*Úlohou rozumíme obvykle jakoukoli výzvu k činnosti. Matematická úloha vyzývá řešitele k matematické činnosti.*“ (Kuřina, 2011, s. 185)

F. Kuřina ve svých pracích nabízí celou řadu kritérií, jak rozlišovat úlohy. Jedním z hledisek je náročnost řešení úlohy pro studenta:

- *cvičení* – při řešení vystačíme se znalostí postupu, který je v podstatě určen textem úlohy;
- *úloha* – řešitel kombinuje více algoritmů;
- *problémy* – jejich řešení vyžaduje tvořivý přístup a postup řešení není řešiteli znám. (Kuřina, 2011, s. 187)

Je zřejmé, že vymezení uvedených autorů (J. Kopka, F. Kuřina) se liší v záměně pojmů: problém $\leftrightarrow$ úloha a zkoumání $\leftrightarrow$ problém.

Kuřinova terminologie plně odpovídá terminologii, kterou lze nalézt v pracích J. Vyšína. Ten ve své práci (Vyšín, 1972, s. 7) rozlišuje tři základní úlohové útvary:

- *cvičení* – úloha, která slouží obvykle k procvičování probraných stereotypů, algoritmů, početních i grafických postupů, vzorců a podobně;

- *úloha* – (úlohou) budeme rozumět zadání situace dosud typově neřešené, kde si vystačíme v podstatě s poznatky a aparátem známým;
- *problém* – budeme vždy předpokládat větší podíl řešitelovy tvořivosti a vynalézavosti.

F. Kuřina i J. Vyšín slovem *příklad* potom označují „vzorový příklad“, tj. zadání úlohy doplněné jedním nebo více řešeními.

Pro srovnání uvádím i pohled na situaci tak, jak jej zastává F. Kuřina v (1976, s. 13–14). Výchozím pojmem pro něj je *problémová situace*, kterou na základě žákovských poznávacích schopností dělí na:

- *reálné situace*, v nichž základní téma není tématem matematickým a kde žák provádí *matematizaci*;
- problémové situace *matematicky formulované.*

Dále pak uvádí: „*Studium problémové situace začíná* otázkami. *Některé otázky vedou přirozeně k* úlohám. *Ty úlohy, které podněcují zkoumavý postoj žáka, především přiměřenou obtížností a neznámým postupem řešení, překvapivým tvrzením, neočekávaným výsledkem nebo tím, že studovaná otázka stojí v okruhu žákových zájmů, se nazývají* problémy. *Rozlišení úlohy a problému je tedy do značné míry subjektivní.*“ (s. 14)

Zmiňme jen, že například D. Hrubý (2008) užívá slovo *cvičení* jako synonymum slov úloha či problém.

Přestože se terminologie J. Vyšína i F. Kuřiny značně shoduje, J. Vyšín jako základní pojem užívá sousloví *matematický problém.* Ten pak vymezuje následovně: „*Matematickým problémom (stručne problémom) budeme rozumieť matematickú úlohu, ktorú nemože riešiteľ vyriešiť len pomocou matematických mechanizmov a stereotypov, ktoré si osvojil, ale na riešenie kterých potrebuje – hoci aj v minimálnej miere – niečo z tej sféry duševnej činnosti, ktorú spravidla voláme matematická tvorivosť. Matematickú tvorivosť nedokážeme doteraz uspokojivo charakterizovať a už vobec nie definovať.*“ (Vyšín, 1978, s. 9)

Obdobně J. Kopkovi, F. Kuřinovi a J. Vyšínovi přistupuje k dělení problémů J. Zhouf ve své práci (Zhouf, 2010) a vymezuje následující dva pojmy:

- *úloha* – její řešení je dáno nějakým algoritmem, který žáci znají, nebo by měli znát; slouží k prověření žákových znalostí a dovedností;
- *problém* – žákovi dopředu nemusí být znám algoritmus; k jeho vyřešení je třeba poněkud větších schopností a dovedností k objevení strategie řešení, nebo se dokonce jedná o situaci, která ještě není vyřešená. (Zhouf, 2010, s. 27)

Pro potřeby své práce však přijímá úmluvu, že mezi problémem a úlohou nebude rozlišovat a problém vymezuje jako „*situaci, která vede k otázce, jak tuto situaci vyřešit.*“ (Zhouf, 2010, s. 27)

Tým vedený M. Hejným vymezuje dva pojmy – *úlohu* a *problém*, přičemž problémem pro ně je otevřený problém (nevyřešený problém), kde ani nepředpokládají, že by ho žák vyřešil, ale při jehož řešení se velmi naučí. (Hejný a kol., 1990, s. 128)

Vnitřní struktura úlohy

Autoři, kteří se zabývají vnitřní strukturou úlohy, poukazují na skutečnost, že řada atributů je společná všem úlohám. Následující vymezení vnitřní struktury úlohy přesto ukazují na různorodé přístupy k uchopení tohoto pojmu.

J. Cihlář a kol. (2007, s. 7) hovoří o vnitřní struktuře úlohy následovně:

„*Testová úloha se skládá z několika částí, které se v závislosti na typu úlohy mohou různě proměňovat:*

- *instrukce (návod, co má žák dělat);*
- *výchozí text (tedy i tabulka, mapa, graf aj.);*
- *kmen úlohy (zadání úlohy ve formě otázky, úkolu, neúplného tvrzení);*
- *alternativy (u úloh s výběrem odpovědi nabízené možné odpovědi; nesprávné odpovědi nazýváme distraktory);*
- *správné řešení.*“ (2007, s. 7)

Oproti tomuto vymezení můžeme postavit vymezení vnitřní struktury úlohy, jak ho popsal J. Vyšín (1972). Sám autor nás však žádá, abychom to nechápali ve smyslu matematické striktní definice.

„*Je dána množina* Ω *matematických objektů a je dána výroková forma* f *o jedné nebo více proměnných. Úkolem je nalézt a udat (způsobem prozatím blíže neurčeným) obor pravdivosti* $\mathbf{P}$ *formy* f *v množině* Ω*, tj. množinu* $\mathbf{P}$ *všech objektů z* Ω*, pro něž dává* f *pravdivý výrok.*“ (Vyšín, 1972, s. 11)

J. Mareš (1980) dále uvádí pedagogicko-psychologický náhled L. M. Fridmana, který vnímá vnitřní strukturu úlohy jako sestávající se ze čtyř složek (prvé dvě tvoří podmínky úlohy):

- *předmětnou (věcnou) oblast*, tj. objekty, o nichž se v úloze mluví;
- *vztahy*, které objekty navzájem spojují;
- *požadavek*, instrukci o cíli, kterého je třeba dosáhnout;
- *operátor*, tj. soubor operací, jež se mají vykonat s podmínkami úlohy, aby byl splněn její požadavek. (Mareš, 1980, s. 596)

V závislosti na této vnitřní struktuře vymezuje L. M. Fridman úlohu následujícím způsobem: „*Úloha je požadavek (přednesený v přirozeném či umělém jazyce) na provedení určitého explicitně či implicitně uvedeného operátoru (tj. posloupnosti operací) vzhledem k zadané podmínce.*“ (Mareš, 1980, s. 597)

Nahlédneme-li situaci z hlediska psychologů, pak nemůžeme hovořit o úloze jako takové, ale vrátíme se zpět k termínu *problém.* J. E. Davidsonová, R. Deuserová a R. J. Sternberg (1994) vymezují problém na základě vnitřní struktury následovně: „*Všechny problémy se skládají ze tří důležitých charakteristik: to, co je dané, cíl a překážky. Dané je tvořeno prvky, vztahy mezi nimi a podmínkami, které vytvářejí počáteční stav problémové situace. Cílem je výsledek nebo požadovaný výstup problému. Překážky jsou* *pak tvořeny vlastnostmi jak řešitele, tak problémové situace, které činí obtíže řešiteli, aby převedl počáteční stav do požadovaného stavu.*“[1] (s. 207)

Typy úloh

V literatuře a i v běžné praxi se můžeme setkat se snahou o pojmenování úloh z hlediska požadovaného úkonu. Toto pojmenování nás opravňuje hovořit o různých typech úloh. F. Kuřina výstižně rozdělil úlohy podle požadovaného úkonu, přičemž ten je vždy uvozen určitým „signálním slovem“. Přehledně je toto rozdělení vyjádřeno tabulkou (viz tabulka 1.1), kterou můžeme najít jak v (Kuřina, 2011, s. 186), tak v (Kuřina, 2003a, s. 130). V (Kuřina, 2003b, s. 1) můžeme najít typy mírně odlišné a vymezené pouze výzvou (vypočítejte, upravte, rozhodněte, sestrojte, určete, definujte a dokažte).

Úloha	**Výzva**	**Otázka**
Kalkulativní	Vypočítejte...	Kolik?
Rozhodovací	Rozhodněte...	Zda?
Určovací	Určete...	Který?
Konstrukční	Sestrojte...	Jak?
Důkazová	Dokažte...	Proč?

Tabulka 1.1: Klasifikace úloh dle typu

J. Vyšín (1972) ve své práci hovoří o úlohách určovacích, důkazových, existenčních a konstrukčních, avšak poukazuje na skutečnost, že poslední tři typy úloh lze převést na úlohu určovací.

Obdobně se k dané problematice staví i G. Pólya (2004), u kterého můžeme najít následující typy úloh, byť sám neprovádí explicitní rozdělení: konstrukční úloha (*a problem of construction*), důkazová úloha (*a problem to prove*), početní úloha (*a rate problem*) a určovací úloha (*a problem to find*).

J. Mareš (1980) uvádí, že L. M. Fridman ve své exaktní teorii učebních úloh uvažuje tři základní typy úloh:

- úlohy na zjištění hledaného – obvykle požadují na řešiteli nalezení správné posloupnosti operací;
- důkazové úlohy – požadují nalezení jisté teorie zdůvodňující daný výrok;
- konstruktivní či transformační úlohy – požadují nalezení určité posloupnosti transformací, která převede zadané prvky ve výsledný objekt s jistými předepsanými vlastnostmi.

[1] All problems contain three important characteristics: givens, a goal, and obstacles. The givens are the elements, their relations, and the conditions that compose the initial state of the problem situation. The goal is the solution or desired outcome of the problem. The obstacles are the characteristics of both the problem solver and the problem situation that make it difficult for the solver to transform the initial state of the problem into the desired state.

Role úlohy

Je důležité si uvědomit, že úloha hraje ve vyučovacím procesu celou řadu rolí a podle přidělené role k ní zaujímá určitý postoj jak řešitel, tak i předkladatel úlohy.

F. Kuřina (2011, s. 186; 2003b, s. 1) rozděluje úlohy na dvě základní skupiny:

- *kultivační úlohy*, pro které jsou charakteristické role:
  - motivační;
  - ilustrační (příklady);
  - procvičovací;
- *diagnostické úlohy*, pro které jsou charakteristické role:
  - diagnostická;
  - kontrolní.

Jiný pohled na role úloh předkládá A. H. Schoenfeld (1992, s. 13), který říká, že úloha slouží:

- jako důvod pro výuku matematiky (*as a justification for teaching mathematics*);
- jako specifická motivace pro vybrané téma (*to provide specific motivation for subject topics*);
- jako odpočinek (*as recreation*);
- jako prostředek k rozvíjení nových dovedností (*as a means of developing new skills*);
- jako procvičování (*as practice*).

Rolí úlohy ve vztahu ke vzdělávacímu procesu se zabývá G. Pólya v (1981, s. 139 druhého dílu) a rozlišuje čtyři role úlohy v závislosti na obtížnosti úlohy a její hodnotě ve vzdělávání.

- Jednoduchá aplikace naučeného pravidla (*one rule under your nose*) – úloha může být vyřešena přímo, mechanickou aplikací pravidla, nebo dříve ukázané úlohy. G. Pólya uvádí, že úloha nabízí sice procvičení, avšak nic jiného.
- Výběr z dříve naučených pravidel (*application with some choice*) – úloha i nadále může být vyřešena přímo, avšak neděje se tak hned po seznámení s pravidlem, ale obvykle až po nějaké době, kdy byla probrána další učební látka.
- Kombinování pravidel (*Choice of a combination*) – k vyřešení úlohy je zapotřebí kombinovat alespoň dvě dříve naučená pravidla, či znalosti.
- Začínáme s obtížnějšími úlohami (*approaching research level*) – úlohy na této úrovni G. Pólya nazývá *úlohy výzkumného charakteru* (*research problems*) a poukazuje na skutečnost, že pro někoho těmito úlohami mohou být již úlohy na úrovni kombinování.

Úloha může ovšem hrát roli nejen ve vztahu ke vzdělávacímu procesu, ale i ve vztahu k procesu řešení úlohy. Tímto se ve své práci zabývá G. Pólya (2004) a hovoří o úloze:

- analogické (*analogous problem*);
- přeformulované (*restated problem*);
- pomocné (*auxiliary problem*);
- obdobné (*related problem*) – ve smyslu úlohy známé z dřívějška.

Další dělení úloh se opírá o hledisko, odkud vzešlo zadání úlohy.

O specifické roli úlohy se zmiňuje F. Kuřina v (1976). Úloha zde vystupuje v roli zprostředkovatele vzdělání a autor tento způsob vyučování nazývá *problémovým vyučováním*, které vymezuje následovně: „*Problémovým vyučováním rozumíme takový systém vyučování, kdy žák samostatným zkoumáním dané problémové situace, formulací a řešením úloh dospívá k pochopení a tvorbě matematických pojmů a postupů a k řešení problémů.*“ (s. 14)

Povaha zadání úlohy

Řada autorů se zabývá tím, jak je úloha zadána a jaké objekty v ní vystupují. Na základě toho můžeme rozdělit úlohy do dvou základních skupin:

- *praktické* (Pólya, 2004), *reálné* (Fridman a Tureckij, 1989; Kuřina, 1976), či *aplikační* (Odvárko, 1996) *úlohy*;
- *matematické úlohy* (Pólya, 2004; Fridman a Tureckij, 1989; Kuřina, 1976);

M. Hejný a kol. (1990) a L. M. Fridman a J. N. Tureckij (1989) dále uvádějí

- *standardní úlohu* – obvykle je uvozena jednoznačnou výzvou (např. řešte rovnici);
- *nestandardní úlohu* – slovní úloha, úloha z kombinatoriky, …

Tato dělení vycházejí z hlediska zadání, či z hlediska kombinace zadání a obsahu.

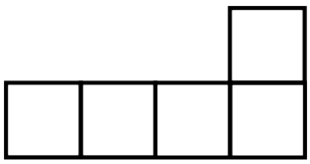
Jiný pohled na objekty vystupující v úloze přináší práce S. Trávníčka (1996). Ten poukazuje na skutečnost, že objekty a i samotná úloha mohou být nahlíženy ze čtyř různých hledisek:

- *hledisko odborné* – každá úloha je součástí matematiky;
- *hledisko didaktické* – každá úloha je součástí matematického vzdělávání, ať už vyučovacího procesu nebo samostudia;
- *hledisko systémové* – úloha vždy definuje nějaký dílčí systém, definuje prvky tohoto systému, vazby mezi nimi, a obvykle i problém, který je nutno vyřešit;
- *hledisko jazykové* – každá úloha je jazykovým projevem a literárním textem, neboť přináší souvislou informaci o nějakém dílčím problému matematickém nebo jiném, při jehož řešení se matematika uplatní. (Trávníček, 1996, s. 113–114)

Jazyk jako takový může být buď přirozený, (např. jazyk český) nebo umělý – jazyk matematiky. S. Trávníček upozorňuje na tu skutečnost, že řešitel je úlohou kultivován nejen z prvních tří hledisek, ale i z posledního hlediska, přičemž kultivace v jazyce matematiky se odráží i v kultivaci předchozích tří hledisek. Kromě toho úloha může žáka rozvíjet i v jiných oblastech, neboť prostřednictvím obsahu literárního útvaru mu může sdělovat informace a poznatky z dalších oblastí. V řadě případů se potom jedná o úlohu praktickou či aplikační.

I. S. Robertson (2001) nabízí pohled, který sleduje aspekt úplnosti zadání a v závislosti na něm rozlišuje:

- *dobře zadanou úlohu* (*well-defined problem*), která v rámci zadání obsahuje všechny údaje nezbytné k vyřešení úlohy. Úloha může obsahovat i nadbytečné údaje a řešitel potom řeší dvě úlohy z hlediska odbornosti – jednu matematickou a jednu informatickou;
- *nedostatečně zadanou úlohu* (*ill-defined problem*), která neobsahuje všechny nezbytně nutné údaje k vyřešení úlohy;
  (Například ze zadání: „Řeš rovnici $2x + 5 = 0$.“, nevíme v jakém číselném oboru máme rovnici řešit.)
- *abstraktně zadanou úlohu* (*abstractly defined problem*), která má všechny atributy dobře zadané úlohy, avšak cílový stav je požadován v abstraktních pojmech. I. S. Robertson uvádí jako příklad následující úlohu: „*Šestnáct zápalek je uspořádáno do pěti čtverců způsobem patrným z obrázku 1.5. Přesuňte tři zápalky, abyste vytvořili čtyři čtverce.*“[2] (Robertson, 2001, s. 5)



Obrázek 1.5: Úloha: Šestnáct zápalek

Je nutno uvést, že I. S. Robertson nahlíží na studovanou problematiku prizmatem psychologa. Vymezuje pojem „problém“, nikoliv úloha, a to jako situaci, kdy známe počáteční stav (*initial state*) a chceme dosáhnout cílového stavu (*goal state*). Přestože se jedná o práci psychologickou, autor pro ilustraci různých přístupů velmi často užívá matematické úlohy. Zajímavé je, že obdobně přistupuje k vymezení pojmu „problém“ (nikoliv úloha v mém smyslu slova) G. Pólya. V práci (Pólya, 1981) hovoří o situaci, kterou nazývá *zabývat se problémem* (*to have a problem*), a vymezuje ji následovně: „*Zabývat se problémem znamená: vědomě hledat způsoby k dosažení přesně určeného cíle, který není bezprostředně dosažitelný.*“[3] (Pólya, 1981, s. 117)

Určitý pohled na správně či nesprávně zadanou úlohu nabízí i L. M. Fridman dle (Mareš, 1980, s. 597–598). V tomto případě hovoří o parametrech úlohy, které tvoří:

[2] Given 16 matches arranged in 5 squares like this: ... move 3 matches to form 4 squares.

[3] Thus, to have a problem means: to search consciously for some action appropriate to attain a clearly conceived, but not immediately attainable, aim.

- struktura úlohy (viz výše);
- logická správnost úlohy;
- stupeň určenosti úlohy;
- míra zobecnění úlohy;
- míra úplnosti úlohy;
- jazykové vyjádření úlohy.

Domnívám se, že správně či nesprávně zadaná úloha koresponduje s parametry: logická správnost úlohy, stupeň určenosti a míra úplnosti úlohy.

V řadě případů mohou být jako součást zadání úlohy nabídnuty řešiteli odpovědi. Z tohoto pohledu můžeme rozdělit úlohy na:

- *otevřené* – problém s tvorbou odpovědi; obvykle součástí hodnocení je jak výsledek, tak i postup;
- *uzavřené* – problém, kde je žákovi nabídnuto několik odpovědí a žák z nich má vybrat jedinou správnou, u těchto úloh se hodnotí pouze výsledek; tyto dále dělí na:
  - problémy s výběrem odpovědi – výběr z několika nabídek;
  - problémy dichotomické – odpovědi ANO/NE;
  - problémy přiřazovací – přiřazování dvou skupin pojmů;
  - problémy uspořádávací – hodnoty nebo pojmy se mají uspořádat podle zadaného pravidla.

Toto dělení můžeme najít jak u J. Zhoufa (2010, s. 28), tak u J. Cihláře a kol. (2007, s. 7).

Zadání může také obsahovat buď pouze jednu jedinou problémovou situaci, nebo se může jednat o více takových situací najednou. Toto hledisko ve své práci zmiňuje J. Vyšín (1972). Hovoří o

- *„konkrétní“ úloze* – kdy řešitel řeší jednu jedinou úlohu (např. „Sestrojte trojúhelník ze tří stran, jestliže víte, že délka strany a je 7 cm, velikost strany b jsou 4 cm a velikost strany c je 5 cm.“ I zde je určitá volnost – jde o úlohu nepolohovou, avšak všechny výsledné trojúhelníky budou shodné.);
- *množině úloh* – kam řadí úlohy parametrické a jim podobné (např. „Sestrojte trojúhelník ze tří stran.“ Zde řešíme celou třídu úloh a řešení bude závislé na parametrech úlohy – délkách stran.)

Zadání úlohy může sledovat i různý počet řešení. Tento aspekt zadání úlohy je jedním z parametrů Fridmanovy teorie a popisuje míru obecnosti úlohy.

Jedním ze specifických způsobů zadání úlohy je *slovní úloha*. O. Odvárko vymezuje slovní úlohu následovně: „*Slovními úlohami rozumíme ve školské matematice takové úlohy, v jejichž zadání se vyskytují objekty, jevy a situace z nejrůznějších mimomatematických oblastí. Tyto oblasti zahrnují běžnou denní praxi, různé vědní disciplíny mimo samotnou matematiku, technickou praxi různého druhu apod.*“ (Odvárko, 1996a, s. 337) Vzhledem ke způsobu zadání, slovní úloha hraje celou řadu rolí, kdy

- je prostředkem pro rozvoj dovedností a schopností žáků matematizovat mimomatematické jevy a situace;
- je prostředkem pro rozvoj matematických vědomostí žáků;
- je prostředkem pro rozvoj dovedností a schopností žáků řešit matematické úkoly;
- je možné je využít jako zdroj pro zvyšování motivační úrovně žáků;
- je prostředkem pro rozvoj zájmu žáků učit se matematiku;
- může být jedním z prostředků poznávání různých mimomatematických oblastí a úkolů, které je smysluplné v příslušných mimomatematických oblastech řešit;
- může připravovat žáka na řešení úkolů a problémů, se kterými se může setkat ve svém současném i budoucím životě. (volně podle (Odvárko, 1996a, s. 337–338))

Při pohledu na slovní úlohu se můžeme domnívat, že se jedná o nedostatečně zadanou úlohu, protože zadání úlohy obvykle neobsahuje pokyn: „proveď matematizaci úlohy“, přestože tento úkon je po řešiteli (obvykle) požadován a v řadě případů je právě matematizace daleko důležitější než samotné vyřešení úlohy. Stejně jako řada jiných pokynů bývá tento součástí didaktického kontraktu mezi žákem a učitelem (řešitelem a předkladatelem). Slovní úloha má v řadě případů charakter *aplikační úlohy*, kterou O. Odvárko vymezuje následovně: „*Aplikační úlohu neuvažujeme tedy pouze v úzkém smyslu jako aplikaci (užití) určitého úseku matematického učiva, jako aplikaci matematických pojmů a jejich vlastností, jako aplikaci vzorců či různých algoritmů. Aplikační úlohu v našem pojetí lze spíše charakterizovat jako úlohu z mimomatematické oblasti, kterou je smysluplné v této oblasti řešit.*“ (Odvárko, 1996a, s. 338). O. Odvárko navíc upozorňuje na riziko, které vyplývá z hlediska tvorby slovní (aplikační) úlohy. Pokud se k matematickému jádru, které má být osvojeno (procvičeno) až dodatečně hledá mimomatematický obal ze života, potom může na místo aplikační úlohy vzniknout *pseudoaplikační úloha*, která ve snaze o propojení matematiky a reálného světa nadělá více škody než užitku. Řešiteli na první pohled bude patrné, že užitečnost takto koncipované úlohy je pro praxi nulová a navíc v řadě případů samotné téma úlohy nebude pro něj bude dostatečně nezajímavé. (Odvárko, 1996a) Úlohy, které naplňují některé z výše uvedených bodů kladených na slovní úlohu, nazývám ve shodě s O. Odvárkem (1996a, s. 338) *matematickými hříčkami* (hádankami, rébusy). Pro tyto úlohy je podstatné, že řešitel je nepovažuje za úlohy aplikační a nemají ani charakter úlohy pseudoplikační.

M. Koman a M. Tichá (1995; 1996a; 1996b) poukazují na fakt, že aplikační úlohy jsou jedním z prostředků jak splnit úkol „*naučit žáky aplikovat matematiku*“ (1995, s. 113), přičemž aplikační úlohy by měly být „*aktuální pro současnou dobu a zároveň blízké většině žáků*“ (1995, s. 113). Problematice tvorby aplikačních úloh se pak věnuje (Odvárko, 1996b).

Předpokládané znalosti potřebné k řešení úlohy

Podobně jako L. M. Fridman (Mareš, 1980), tak i P. Halmos (1982) se snaží postihnout úlohu nezávisle na řešiteli. Kritériem P. Halmose jsou znalosti, které odpovídají určitému vzdělání ve společnosti, a nezabývá se řešitelem, tj. nezajímá ho, zda řešitel dané znalosti má, či nemá. Jejich vymezení, na rozdíl od jiných, vnímám jako pokus o absolutní klasifikaci, i když každý z nich na to nahlíží ze zcela jiného úhlu pohledu. Relativní klasifikací pak chápu vymezení, které je míněno ve vztahu k řešiteli a jeho aktuálním schopnostem a dovednostem. P. Halmos (1982) dělí úlohy na:

- *elementární* – bez použití kalkulu;
- *pregraduální* – určené pregradualním studentům;
- *graduální* – určené graduovaným studentům;
- *badatelské problémy* – nikdo nezná odpověď.

Z pohledu tohoto vymezení je tato práce věnována pouze elementárním úlohám.

Požadovaný didaktický cíl

F. Kuřina (1985) uvádí klasifikaci na základě sledovaného cíle ve vzdělávání matematice[4]:

- úlohy, které by účelně rozvíjely vazby mezi staršími a nově zaváděnými postupy a pojmy;
- úlohy, k jejichž řešení lze najít kratší a rychlejší algoritmus než ten, který se obvykle používá;
- problémové úlohy, při jejichž řešení je třeba formulovat, vyvracet nebo dokazovat domněnky;
- úlohy propedeutického charakteru;
- úlohy kulturně historického charakteru.

Další práce[5], věnující se problematice řešení úloh, již nepřinášejí z hlediska vymezení pojmu úloha nic nového.

1.1.2 Vlastní vymezení pojmu úloha

Z prací výše uvedených autorů je zřejmé, že jak pojem úloha, tak i jeho klasifikace jsou nahlíženy z několika úhlů pohledu. Proto považuji za účelné uvést vlastní vymezení tohoto pojmu tak, jak jej v práci používám. Pro potřeby této práce se ukázalo nezbytné pohlížet na úlohu prizmatem rolí, proto nepoužívám vymezení J. Kopky, ze kterého jsem původně vycházel.

Úloha

Úlohou rozumím situaci, kdy řešitel je vyzván k činnosti, jejíž vykonání má matematický charakter.

[4] Tuto klasifikaci převzal z jednání IV. mezinárodního kongresu o vyučování matematice, který se konal v Berkeley v roce 1980 (s. 220).

[5] (Larson, 1990), (Hecht a Sklenáriková, 1992), (Odvárko, Calda, Šedivý a Židek, 1990), (Herman, Kučera a Šimša, 2001), (Herman, Kučera a Šimša, 2004)

Samotná výzva k činnosti je obsahem zadání úlohy. *Zadání úlohy* je způsob sdělení obsahu úlohy řešiteli. Pro potřeby své práce předpokládám, že zadání úlohy je řešiteli předloženo v jazyce, kterému rozumí, a způsobem, který je schopen přijmout; to znamená, že neexistuje formální bariéra pro uchopení úlohy řešitelem.

Pokud to nebude nezbytně nutné, potom mezi úlohou a zadáním úlohy nebudu rozlišovat.

Předkladatel

Zatímco pojem řešitel úlohy byl vymezen již v počátku, dosud jsem nepoukázal na skutečnost, že důležitým aspektem je také *předkladatel* úlohy (tj. osoba, která danou úlohu předkládá řešiteli).

Je zřejmé, že předkladatelem úlohy může být kdokoliv. Učitel, řešitel sám, spolužák, rodič, ... Každý z těchto předkladatelů předkládá úlohu s určitým záměrem. Zaměřme se nyní na situaci, kdy předkladatelem úlohy je sám řešitel, neboť v tomto případě může úloha hrát zvláštní role.

V prvé řadě jde o úlohy vytvořené obvykle ze zájmu řešitele – většinou vznikají matematizací nějaké reálné nebo herní situace. Tyto úlohy mají zcela výsadní postavení ve světě úloh, kterými se řešitel zabývá. Jsou totiž jeho vlastní. Tento fakt vystupuje jako silný motivační činitel v procesu řešení úlohy. Ze své praxe mohu potvrdit, že u řady žáků došlo k dalšímu učení se matematice mimo školní prostředí. Právě jimi vytvořená úloha totiž nebyla řešitelná prostředky, kterými disponovali, a tato situace, podmíněná silnou vnitřní motivací, potom vyústila ve spontánní učení se novým partiím matematiky. Ve druhém případě jde o úlohy, které hrají roli lemmat v matematické teorii. Tyto úlohy vznikají v procesu řešení a plně korespondují s vymezením G. Pólyi (analogická, přeformulovaná, ...).

Ve školním prostředí je obvykle předkladatel také tím, kdo vyhodnocuje řešitelovo (žákovo) řešení a zkoumá výsledek. V případě, že úloha hraje roli diagnostickou, stává se předkladatel také tím, kdo na základě předloženého řešení hodnotí řešitele. Tuto roli (hodnotitel) nebudu v textu explicitně uvádět.

Cíle sledované předkladatelem úlohy

Předkladatel může sledovat různé cíle a za účelem dosažení tohoto cíle předkládá řešiteli různé úlohy.

1. *Diagnostický účel* – úloha hraje diagnostickou roli, pokud byla zadána za účelem zjištění požadovaného stavu – např. dovednosti sestavit rovnici nebo sestrojit trojúhelník. Obecně považuji za nezbytně nutné, aby řešitel věděl, že úloha hraje diagnostickou roli, a uvědomil si, kterou dovednost či přítomnost znalosti sleduje. Řešitel se totiž může domnívat, že předkladatel mu zadal úlohu pouze s cílem vyřešit ji. Potom je použití heuristické strategie při řešení úlohy zcela legitimní. Sdělení diagnostického účelu úlohy nemusí být obsahem jejího zadání, ale může být součástí didaktického kontraktu mezi předkladatelem a řešitelem.

   Odlišení úlohy s diagnostickým účelem od ostatních považuji za velmi důležité. V praxi se lze setkat s případy, kdy učitel předjímá tuto roli úlohy, avšak řešitele o tom neinformuje. Ten, i když si je vědom toho, že se jedná o testovací úlohu, se domnívá, že cílem je ji vyřešit, nikoliv prokázat přítomnost určité znalosti. Řešitel sice odevzdá správně vyřešenou úlohu, avšak jiným než očekávaným způsobem, a zadavatel ji hodnotí jako nevyřešenou.

Ve své práci se úlohami hrajícími diagnostickou roli nezabývám.

2. *Motivační účel* – úloha hraje motivační roli buď svým zajímavým kontextem, nebo skrytou možností vyvolat kognitivní konflikt u řešitele, nebo překvapivým výsledkem.

3. *Praktický (výpočetní) účel* – tímto názvem chci zdůraznit, že cílem je dobrat se k výsledku a je jedno, zda řešitel užije nějaký přímý způsob či nějakou heuristickou strategii. Stejně tak je jedno, zda k řešení použije pouze prostředek tužka-papír, nebo počítač, nebo výsledek vyhledá na Internetu (domnívám se, že u posledního uvedeného dojde asi k nejmenšímu kognitivnímu zdvihu u žáka).

Vzhledem k cíli, který v práci sleduji, uvedené rozdělení dle cílů předkladatele má upozornit na úskalí při nesprávně zadané úloze. Ve své práci se zabývám úlohami, ve kterých je jasně vymezen jejich účel, a snažím se, aby mnou předkládané úlohy byly vždy dobře zadané.

V oblasti, kterou zkoumám, nemá opodstatnění rozlišovat mezi pojmy „cvičení“, „úloha“ a „problém“ ve smyslu J. Kopky, F. Kuřiny či J. Vyšína, neboť tato rozlišení vnímám jako roli, kterou daná úloha hraje vůči řešiteli. Úloha, která je pro jednoho řešitele cvičením, je pro jiného úlohou a pro někoho i problémem. Stejně tak nerozlišuji mezi standardní či nestandardní úlohou (ve smyslu M. Hejného a kol.), neboť se domnívám, že se opět jedná pouze o role, které úlohy hrají vůči řešiteli.

Jedna či více úloh

J. Vyšín (1972) zmiňuje velmi důležitý atribut úlohy, a to zda je úloha „konkrétní“[6] nebo zda je ve skutečnosti množinou úloh. Toto rozdělení považuji za velmi důležité, neboť z hlediska řešení úloh heuristickými strategiemi se do procesu řešení zapojují různé strategie.

Za *konkrétní úlohu* (tzn. konkrétně zadanou úlohu) považuji takovou úlohu, ve které jsou všechny objekty jednoznačně vymezeny a skupina řešitelů se stejnou znalostní základnou je identifikuje stejně. Jako příklad uvádím následující úlohu:

„Tři pocestní se zastavili v hospůdce Na samotě. Zatímco čekali, až jim hostinský přinese večeři, všichni usnuli. Když se probudil první z nich, uviděl na stole mísu s koláči, třetinu z nich snědl a opět usnul. Za chvíli se probudil další, ale nevěděl, že se první pocestný už najedl, snědl tedy třetinu toho, co zbylo na míse. Když se probudil třetí pocestný, našel na míse 8 koláčů. Kolik koláčů bylo na míse původně?“[7]

Vyšínem vymezený pojem „množina úloh“ nahrazuji jinými pojmy: úloha zadaná neurčitě a úloha zadaná parametricky.

[6]Pojem „konkrétní úloha“ zavedli členové výzkumného týmu v rámci řešení projektu.
[7]Úloha je variací na známé téma.

Rozdíl mezi úlohou zadanou parametricky a neurčitě vymezuji následovně: V případě *úlohy zadané parametricky* je parametr explicitně zmíněn v jejím zadání, nebo se objeví v procesu jejího řešení. Oproti tomu v případě *úlohy zadané neurčitě* je údaj, který v procesu řešení úlohy aktivně vystupuje, v zadání zmíněn, ale skrytě. ***V úloze zadané parametricky závisí výsledek na jednom či více parametrech (výsledkem úlohy je i netriviální diskuse).*** Výsledek úlohy zadané neurčitě je nezávislý na neurčených údajích v zadání (součástí řešení není žádná diskuse).

Následující příklady zadání ilustrují výše popsané typy zadání úlohy.

Konkrétní úloha

Pumpa přečerpá požární nádrž o objemu 1600 hl za 3 hodiny 30 minut. Během nasávání se pumpa zanesla a pracuje nyní se 40% výkonem. O kolik procent se prodlouží doba potřebná k vyčerpání nádrže?

Neurčitě zadaná úloha

Pumpa, která vysávala vodu z nádrže, se znečistila a pracuje jen na 40 % své kapacity. O kolik procent se prodlouží doba potřebná k vyčerpání nádrže?[8]

Parametricky zadaná úloha

Pumpa, která vysávala vodu z nádrže, se znečistila a pracuje se sníženým výkonem. O kolik procent se prodlouží doba potřebná k vyčerpání nádrže?

Sledovaný didaktický cíl

Z didaktických cílů, které prezentuje F. Kuřina, jsem se zamýšlel nad úlohami,

- k jejichž řešení lze najít kratší a rychlejší algoritmus než ten, který se obvykle používá;
- při jejichž řešení je třeba formulovat, vyvracet nebo dokazovat domněnky;
- propedeutického charakteru;

neboť právě užití heuristických strategií nabízí možnost splnění jednotlivých cílů.

Další atributy úloh

Ve své práci se vědomě vyhýbám nedostatečně zadaným úlohám (ve smyslu I. S. Robertsona). Jsem si vědom toho, že v průběhu experimentů se některé úlohy mohly jevit jako neúplné (tzn. že některá informace v zadání chybí), ale nebylo tomu tak.

Stejně tak jsem se v experimentech vyhýbal uzavřeným úlohám (ve smyslu J. Zhoufa), neboť se domnívám, že hrají spíše diagnostickou roli.

Primárně jsem také nesledoval vliv zadání úlohy na způsob řešení či řešitelovu úspěšnost při řešení úlohy. Tudíž mezi úlohami slovními, aplikačními, ryze matematickými apod. nečiním žádný rozdíl.

Ve své práci také nesleduji vliv reprezentace zadání úlohy na způsob řešení či řešitelovu úspěšnost při řešení úlohy.

[8]Zadání úlohy je převzato z (Kuřina, 1990, s. 62). Zadání předchozí i následující úlohy vznikla variací na dané téma.

Problém

Ve své práci používám pojem *problém* (*problémová situace*) v širším pojetí než pojem *úloha* a obvykle jím mám na mysli spíše reálnou situaci, kterou nahlížejí psychologové. Podstatné je, že z hlediska řešení problémů/úloh mají obě skupiny obdobné atributy, přičemž výsledky výzkumů lze v řadě případů přenést z jedné oblasti do druhé.

1.2 Řešení úlohy

Ve druhé části této kapitoly se zabývám vymezením pojmu *řešení (matematické) úlohy*[9] v kontextu různých přístupů a pohledů. Nejprve uvádím ucelený pohled na řešení úlohy a poté se zaměřuji na pojem tak, jak jej vnímám já. V textu této části se prolínají přístupy různých autorů a z jejich částečné syntézy a úpravy vychází mé pojetí procesu řešení úlohy. Cílem této kapitoly je nejen vymezit podstatu řešení úlohy, ale také různé obecné principy a jak je naplňovat.

1.2.1 Základní vymezení řešení úlohy

G. Pólya specifikuje, co rozumí *řešením úlohy* (*solving a problem*) takto: „*Řešit úlohu znamená najít cestu z obtížné situace, cestu, jak obejít překážku, cestu k dosažení cíle, který nebyl bezprostředně dosažitelný.*“[10] (Pólya, 1981, s. ix) Dodává, že tomuto procesu se lze naučit: „*Řešení úloh je praktickou dovedností, jakou je plavání, lyžování, nebo hra na klavír. Můžete se jí naučit jen nápodobou a procvičováním.*“[11] (Pólya, 1981, s. ix) Dále navazuje na své vymezení situace mít problém[12] a vyřešení problému specifikuje jako nalezení požadovaného způsobu[13] (Pólya, 1981, s. 117). Obecně řešení problémů považuje za atribut inteligence a výlučnou vlastnost člověka.[14] (Pólya, 1981, s. 118)

J. R. Hayes uvádí, že „*jedním ze způsobů, jak lze charakterizovat proces řešení problému, je popsat ho jako pátrání po operátoru nebo kombinaci operátorů, které řeší problém.*“[15] (Hayes, 1981, s. 58)

Studiem další literatury jsem dospěl pouze ke zjištění, že *řešením úlohy je nazýván proces, kterým má řešitel převést počáteční stav do požadovaného stavu.*

Vymezit přesně co, je myšleno pojmem *proces* v tomto kontextu, je poměrně obtížné, neboť každá skupina autorů studující tuto problematiku ho nahlíží prizmatem svého oboru. Jednotlivé obory, jako jsou psychologie (pedagogická, marketingová, ...),

[9] Pokud nebude řečeno jinak, vždy budu mít na mysli *matematickou* úlohu.

[10] Solving a problem means finding a way out of a difficulty, a way around an obstacle, attaining an aim which was not immediately attainable.

[11] Solving problems is a practical art, like swimming, or skiing, or playing the piano: you can learn it only by imitation and practice.

[12] viz kap. 1.1.1, s. 19

[13] To solve a problem means to find such action.

[14] Solving problems is the specific achievement of intelligence, and intelligence is the specific gift of man.

[15] One way to characterize the problem-solving process is to describe it as a search for an operator or a combination of operators to solve the problem.

studium umělé inteligence, oborové didaktiky i jednotlivé vědní disciplíny vnášejí do studované problematiky vlastní proměnné, jejichž syntézu v ucelený pojem nebylo reálné provést.

Sám vymezuji *řešení úlohy* jako *vědomý proces řešitele sestávající z konečně mnoha na sebe navazujících kroků, které převedou počáteční podmínky úlohy na požadovaný stav (výsledek).* Tímto vymezením eliminuji situace, kdy řešitel vyřeší úlohu pomocí vhledu, neboť tento stav je vždy vlastní konkrétnímu řešiteli a konkrétní dané úloze.

Takto vymezené uchopení pojmu do určité míry koresponduje s vymezením pojmu, jak jej vnímá J. Vyšín (1972, s. 19–23). V jeho vymezení (viz kap. 1.1.1, s. 15) nacházíme slova „nalézt“ a „udat“, která popisují činnost řešení. Tuto činnost pak specifikuje jako hledání výrokové formy g, která je nám „příjemnější“ než výroková forma f, a která má v oboru Ω týž obor pravdivosti $\mathbf{P}$. Celý proces pak rozděluje do několika etap.

První etapa řešení vypadá schematicky takto: Je dán obor řešení Ω a výroková forma f, která má obor pravdivosti $\mathbf{P}$. Tvoříme postupně výrokové formy $f = f_1$, f_2, f_3, …, f_n s obory pravdivosti $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, …, $\mathbf{P}_n$, pro něž platí:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 \subset \mathbf{P}_2 \subset \mathbf{P}_3 \subset \ldots \subset \mathbf{P}_n.$$

Pokud platí, že $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_{i+1}$, tak potom krok, ve kterém došlo k vytvoření výrokové formy f_{i+1} se nazývá *ekvivalentní úpravou.*

Autor pak celý postup nazývá *analýzou čili rozborem matematické úlohy* a závěrem analýzy je prohlášení $\mathbf{P}_n$ za *hypotetický systém řešení* (v mém pojetí se jedná o hypotetický výsledek).

Druhou etapou řešení je *kontrola čili zkouška*, kdy řešitel rozhodne, které prvky z hypotetického systému řešení se stanou *systémem řešení úlohy* (výsledkem).

1.2.2 Vymezení obsahu procesu řešení úlohy

V předchozí kapitole jsem se snažil vymezit, jak vnímám, „co je řešení úlohy“. Cílem této části je popsat, jak tento proces probíhá z hlediska vnitřní struktury.

Explicitní základ vnitřní struktury procesu řešení položil G. Pólya v prvním vydání knihy *How to Solve It* v roce 1945. Přestože byl určitě v obdobném provedení znám, G. Pólya ho sepsal do celku v podobě otázek, které si má řešitel klást, a návodných pokynů, které mu můžou pomoci.

Řešení úlohy se skládá ze čtyř základních fází[16]:

1. *Porozumění úloze* (*understanding the problem*) – cílem je porozumění zadání úlohy a vnitřní struktuře úlohy co možná nejlépe. Základní otázky jsou typu: Co je neznámá? Co jsou vstupní data? Jaká je podmínka [řešení]? Základní pokyny jsou následující: Nakresli si obrázek, vše si vhodně označ, …

2. *Návrh plánu* (*devising a plan*) – cílem je navržení postupu řešení úlohy. Domnívám se, že se jedná o analogii rozboru konstrukční úlohy. Základní otázky jsou:

[16]Zpracováno volně na základě (Pólya, 2004, s. xvi–xvii).

Viděl jsi dříve podobnou úlohu? Znáš příbuznou úlohu? Umíš tuto úlohu přeformulovat? V rámci tohoto kroku navrhuje řešitel různé postupy, jak se vypořádat s úlohou, obvykle pomocí heuristických strategií.

3. *Provedení plánu* (*carrying out the plan*) – cílem je dospět k výsledku, přičemž řešitel má postupovat podle připraveného plánu a ověřovat krok po kroku.

4. *Kontrola* (*looking back*) – v rámci poslední fáze řešitel ověří, zda získal požadovaný výsledek, zda splnil podmínku zadání. Zda dokáže výsledek nebo postup použít pro jinou úlohu.

Na G. Pólyu navazující A. H. Schoenfeld (1981, s. 21–26) rozděluje proces řešení úlohy do fází, kterými by měl úspěšný řešitel projít. Jedná se o následující epizody: *čtení* (*reading*), *analýza* (*analysis*), *zkoumání* (*exploration*), *plánování a provedení* (*planning/implementation*), *ověření* (*verification*) a *přenos* (*transition*). Aby projití epizodou bylo úspěšné, nabízí v rámci každé epizody řešiteli celou řadu návodných otázek. Tyto epizody mají řešiteli umožnit klást si správné otázky a činit správná rozhodnutí. Autor upozorňuje, že právě „*nedostatek inteligentního řízení může odsoudit pokusy o řešení úlohy k nezdaru.*“[17] (Schoenfeld, 1981, s. 16)

O něco širší pohled na Pólyovo fáze přinášejí F. K. Lester, J. Garofalo a D. L. Krollová, kteří vycházejí z práce G. Póyli a zavádějí tyto *klíčové prvky* (*key points*) řešení úlohy: *zorientování se* (*orientation*), *organizace* (*organization*), *provedení* (*execution*) a *ověření* (*verification*), kde připouštějí dvě možnosti ověření – *ověřování v průběhu řešení* (*verification throughout the solution*) a *ověření na konci řešení* (*verification at the end of the solution*). K přechodu od jednoho klíčového prvku ke druhému dochází tehdy, když metakognitivní rozhodnutí má vliv na kognitivní akci[18].

Obdobně jako G. Pólya vnímají tuto strukturu i psychologové J. E. Pretzová, A. J. Naples a R. J. Sternberg, kteří tvrdí, že proces řešení úlohy probíhá v cyklech (Pretz, Naples a Sternberg, 2003, s. 3–4) a popisují daný cyklus jak uvádím níže:

1. Rozpoznat nebo identifikovat problém. (*Recognize or identify the problem.*)
2. Mentálně vymezit a reprezentovat problém. (*Define and represent the problem mentally.*)
3. Vytvořit strategii řešení. (*Develop a solution strategy.*)
4. Uspořádat si znalosti (informace) o problému. (*Organize his or her knowledge about the problem.*)
5. Alokovat mentální i fyzické zdroje potřebné pro řešení úlohy. (*Allocate mental and physical resources for solving the problem.*)
6. Sledovat pokrok vedoucí k cíli. (*Monitor his or her progress toward the goal.*)
7. Vyhodnotit řešení z hlediska přesnosti. (*Evaluate the solution for accuracy.*)

Je zřejmé, že tento přístup je vlastně zjemněním Pólyova vymezení průběhu procesu. M. P. Carlsonová a I. Bloomová v práci (Carlson a Bloom, 2005) uvádějí, že proces

[17] the absence of intelligent management may doom problem-solving attempts to failure

[18] Zpracováno volně na základě (Lester, Garofalo a Kroll, 1989, s. 18).

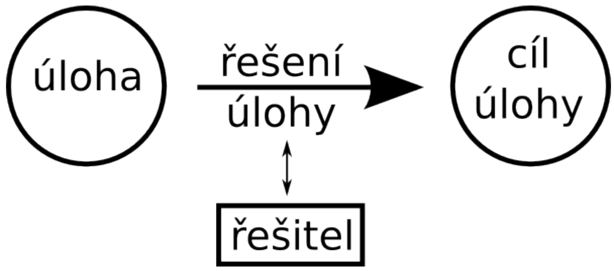
řešení úlohy má v podstatě vždy cyklickou povahu. Jejich *vícerozměrný rámec řešení úloh* (*multidimensional problem-solving framework*) (Carlson a Bloom, 2005, s. 51) popisuje čtyři fáze řešení úloh, které jsou obdobné klíčovým prvkům v (Lester, Garofalo a Kroll, 1989) – *zorientování se* (*orientation*), *organizace* (*organization*), *provedení* (*execution*) a *prověření* (*checking*), avšak celý proces řešení rozšiřuje o atributy řešení úloh, které autoři rozdělují do pěti skupin (Carlson a Bloom, 2005, s. 51):

- *zdroje* (*resources*) – znalosti a postupy, koncepční chápání, technologie a psané materiály;
- *řízení* (*control*) – využívání znalostí na počátku, využívání znalostí v průběhu řešení úlohy, metakognitivní chování v průběhu řešení úlohy;
- *metody* (*methods*) – vytváření nových idejí, provádění výpočtů, využívání zdrojů;
- *heuristiky* (*heuristics*) – užívání heuristických strategií během řešení úlohy;
- *dopady* (*effects*) – očekávání, přesvědčení, emoce a zhodnocení (matematické).

Pro potřeby této práce a pro potřeby zmiňovaného výzkumu jsem musel přijmout celou řadu omezení a zjednodušení. Protože práce se zabývá užitím heuristických strategií při řešení úloh, což koresponduje se čtvrtou skupinou atributů, zaměřil jsem se především na výzkum tohoto aspektu.

1.2.3 Vlastní vymezení procesu řešení úloh

Ve vlastním vymezení řešení úlohy (viz výše) zjednodušuji popis celého procesu. Vycházím ze situace, kdy na jedné straně je úloha a na druhé straně výsledek, a předpokládám, že úloha byla řešiteli zadána předkladatelem (schematicky je to znázorněno na obr. 1.6).



Obrázek 1.6: Schéma vymezení problému

V mém pojetí přistupuje řešitel k dané situaci trojím způsobem, přičemž prvotním klíčovým atributem je *angažovanost řešitele k řešení úlohy* (dále jen angažovanost). Jedná se o kvalitativní veličinu (a její míru) osobního zapojení řešitele do procesu řešení a popisuje „odhodlání“ řešitele řešit úlohu. Je zřejmé, že angažovanost je závislá na celé řadě jak vnitřních, tak i vnějších faktorů. Mezi vnitřní faktory řadím motivaci řešitele a jeho aktuální stav (tělesný, psychický, ...), podobně mezi vnější aktuální klima ve třídě, sociální postavení, osobnost vyučujícího apod. Jak ukázaly rozhovory s učiteli spolupracujícími na našem experimentu, mezi vnější faktory působící na angažovanost žáka k řešení úlohy patří i (ne)podepsání listu, na kterém žák odevzdává řešenou úlohu. Učitelé se domnívají, že už jenom samotné podepsání listu vede k větší angažovanosti žáka.

Domnívám se, že stěžejní částí angažovanosti řešitele je jeho motivace k řešení úlohy. Ta je chápána jako výsledek procesu motivování. Vzhledem k tomu, že cílem této práce není studium motivace řešitele k řešení úlohy, uvádím zjednodušený pohled na celou situaci, ačkoliv jsem si vědom, že situace je daleko pestřejší, jak dokládají různé teorie motivace lidského chování (viz například Madsen, 1972; 1979; Nakonečný, 1997). Motivací ve školském prostředí se věnují také práce (Pavelková, 2002) a (Hrabal, Man a Pavelková, 1989) a mnohé další. Proces motivování uvádím ve své práci z toho důvodu, že hraje důležitou roli jak v procesu řešení úloh, tak ve vymezení pojmu *angažovanost řešitele*, neboť ta je podle mého názoru výrazně ovlivněna vnitřní motivací.

Při vymezení motivace se přikláním k V. Hrabalovi, F. Manovi a I. Pavelkové (1989), že „*…jestliže motivace učební činnosti plyne převážně z poznávacích potřeb, mluvíme obvykle o vnitřní motivaci – vnitřní z hlediska této činnosti, protože činnost sama uspokojuje danou potřebu*“ (s. 26). Nejen má osobní zkušenost, ale i dlouhodobé pozorování žáků a studentů, které jsem vyučoval, mne vede k domněnce, že samotné řešení úloh má velký potenciál stát se vnitřní motivací. Pohlcení řešitele úlohou bývá v řadě případů natolik veliké, že můžeme hovořit o tzv. *flow motivaci*, jak ji vymezuje I. Pavelková (2002, s. 19), přičemž motivace k řešení úlohy je součástí motivace k učení a jedná se o jednu z poznávacích potřeb, konkrétně o potřebu vyhledávání a řešení problémů.

V řadě případů je původcem motivace jiná osoba než řešitel, či určitá situace pobízející řešitele k řešení úlohy. Potom hovoříme o vnější motivaci a domnívám se, že právě stupeň přijetí vnější motivace má výrazný vliv na angažovanost řešitele. I. Pavelková (2002, s. 20–21) rozlišuje:

- *externí regulace* – motivace, která je iniciována výlučně vnějšími činiteli; z hlediska angažovanosti řešitele má nejnižší schopnost řešitele motivovat;
- *introjektovaná regulace* – pouze pasivní převzetí regulace chování, která není vnitřně přijata; řešitel přistupuje k řešení úlohy se stejnou angažovaností, jako v předchozím případě[19];
- *identifikovaná regulace* – jedinec přijímá vnější pravidla a ztotožňuje se s nimi; míra angažovanosti je výrazně vyšší než v předchozích případech, neboť dochází ke zvnitřňování motivace;
- *integrovaná regulace* – regulace je plně integrovaná do celé motivační struktury jedince; z hlediska angažovanosti se jedná stejný stav jako v případě vnitřní motivace, protože incentiva se plně napojila na řešitelovu motivační strukturu.

[19]Tuto domněnku zakládám na rozhovorech se třemi žáky. Vzhledem k tomu, že studium míry angažovanosti nebylo předmětem mého výzkumu, spokojil jsem se s touto úrovní poznání.

Řešitel může přistupovat k řešení úlohy třemi různými způsoby (přístupy): úlohu řeší pokusem, přímým způsobem, nebo užitím heuristické strategie[20].

V prvním případě je předložená úloha pro řešitele problémem a jeho cílem je se problému zbavit. Vycházím z předpokladu, že řešitel nezná algoritmus řešení nebo jej nehodlá použít, nechce se zabývat úlohou jako takovou a jeho motivace vůči řešení úlohy je pouze vnější. Tento způsob řešení označuji jako *pokus* (nezaměňovat se strategií pokus-omyl). Jedná se o nejprimitivnější způsob vypořádání se s úlohou, kdy řešitel si obvykle neklade otázku, zda úlohu správně vyřešil, a plní pouze cíl „vyřešit problém“. Tento stav nastává právě tehdy, když řešitel má velmi nízkou angažovanost na řešení úlohy. Jeho charakteristickým rysem je, že proces řešení probíhá pouze jednou a bez potřeby zpětné vazby o správnosti řešení. Ve své práci se tímto způsobem nezabývám.

Druhý způsob, který označuji jako *přímý způsob* je založen na aplikaci naučené znalosti. Řešitel zná požadovaný proces řešení a navíc je s to si uvědomit, že ho má použít a aplikuje ho. Tento způsob předpokládá vnitřní motivaci k řešení úlohy. Nemusí se vždy jednat o motivaci „vyřešit danou úlohu“, ale např. o „dostat dobrou známku“, „zapůsobit na někoho“ a podobně. Řešitel obvykle očekává zpětnou informaci o úspěšnosti řešení, kterou získá prostřednictvím zkoušky správnosti výsledku, nebo od učitele (předkladatele úlohy). Řešitel může být autorem úlohy, avšak úloha v tuto chvíli hraje pouze roli cvičení. Tímto způsobem řešení se ve své práci nezabývám.

Třetí způsob nazývám *řešení užitím heuristické strategie*. Řešitel nemá požadované znalosti nebo je neumí použít, nemůže tedy úlohu řešit přímým způsobem. V závislosti na míře angažovanosti řešitel buď řešení úlohy vzdá (nepředpokládám), nebo se pokusí řešit úlohu jiným způsobem, než přímým. Předpokládám, že řešitel je vnitřně motivován k řešení úlohy a že heuristická strategie mu umožní úlohu řešit. Autorem úlohy může být i sám řešitel.

Na závěr zmíním ještě jednu situaci, která vnějšími projevy připomíná první způsob – pokus. V řadě případů může nastat situace, kdy řešitel je z nějakého (objektivního) důvodu omezen – nejčastěji časově. Potom je zřejmé, že provádí obvykle pouze jeden „pokus“ o němž předpokládá, že vede k řešení. Na rozdíl od pokusu jako takového se zde předpokládá velká míra angažovanosti řešitele k vyřešení úlohy i jeho zájem o zpětnou informaci o procesu řešení. Obvykle nezáleží na tom, zda volí přímý způsob nebo heuristickou strategii. Tímto případem se ve své práci také nezabývám.

1.3 Řešení úloh užitím heuristické strategie

Řešení úlohy *užitím heuristické strategie* je třetí způsob, kterým se může řešitel vypořádat s úlohou. Předpokladem je vysoká míra angažovanosti na řešení úlohy a nízká míra znalostí a dovedností potřebných k vyřešení úlohy nebo chuť řešit úlohu jiným způsobem než přímým.

Autoři a výzkumníci zabývající se touto problematikou obvykle hovoří pouze o heuristikách (*heuristics*), nikoliv o jejich užití. Pojem *užití heuristické strategie* vznikl

[20]Tento přístup je popsán např. v (Eisenmann, Novotná, Přibyl a Břehovský, 2015), (Přibyl a Eisenmann, 2014), nebo (Eisenmann, Přibyl a Novotná, in print)

v rámci řešení projektu a zdůvodnění, které jsem publikoval jako součást týmu v (Eisenmann, Novotná, Přibyl a Břehovský, 2015), je následující: v začátcích řešení projektu, kdy probíhaly krátkodobé experimenty[21], jsme si všimli následující situace: různí žáci v rámci jedné úlohy použili stejnou strategii, avšak každý trochu jiným způsobem. Výsledkem našeho pozorování byly tři otázky: jakou strategii žák použil, jakým způsobem ji použil a jaký nástroj k tomu použil. Hledání odpovědí na tyto otázky vedlo k vytvoření trojrozměrné klasifikace užití heuristické strategie. Jednotlivé rozměry klasifikace nazýváme *heuristická strategie*, *cesta* užití a *nástroj* užití.

- Heuristické strategie
  - Pokus – ověření – korekce (POK)
  - Systematické experimentování (SE)
  - Užití falešného předpokladu (UFP)
  - Analogie (An)
  - Přeformulování úlohy (PU)
  - Konkretizace a zobecnění (KaZ)
  - Zobecnění a konkretizace (ZaK)
  - Zavedení pomocného prvku (ZPP)
  - Cesta zpět (CZ)
  - Vypuštění podmínky (VP)
- Cesty
  - aritmetická cesta
  - algebraická cesta
  - grafická cesta[22]
    - ilustrativní obrázek
    - řešitelský obrázek
    - využití grafu funkce
- Prostředky
  - papír a tužka
  - kalkulátor (nikoliv grafický)
  - grafický kalkulátor
  - osobní počítač – ve smyslu jakéhokoliv HW, na kterém lze provozovat různé SW
  - model – pegboard, origami, ...

[21] viz kap. 2

[22] V prvopočátcích se tato cesta jmenovala geometrická, pak se však objevilo několik úloh, kde vznikaly „malůvky“, které by z hlediska geometrie neobstály. Sousloví obrázková cesta nezískalo podporu a na grafické cestě (graphic mode) se před několika roky shodli všichni aktivní členové výzkumného týmu.

1.3.1 Základní vymezení heuristických strategií

G. Pólya v předmluvě k prvnímu vydání *How to Solve It*[23] poukazuje na zajímavost, že matematici vidí dvě strany téže mince. Díváme-li se prvním způsobem, vidíme matematiku jako rigidní vědeckou disciplínu, kde na povrch vystupuje především systematičnost a deduktivní přístup. Ovšem druhý způsob nahlížení nám umožňuje vidět matematiku jako hravou, experimentální a induktivní vědu. Právě heuristický přístup odpovídá druhému pojetí a G. Pólya upozorňuje na skutečnost, že se nejedná o žádnou módní záležitost, ale že heuristický přístup byl přítomen v matematice po celou dobu.

Na nebezpečí upřednostňování prvního přístupu před druhým ve školské matematice upozorňuje také J. Vyšín (1978, s. 169) a nazývá to jedním z osudných pedagogických omylů vyučování matematiky.

G. Pólya vymezuje pojem *heuristika* (*heuristic*) jako přístup, který má velké přesahy do různých vědních disciplín: matematiky, logiky, psychologie, vzdělávání, filozofie a možná i dalších (Pólya, 2004, s. vii). Autor opomíjí řecký základ slova – heuriskein (ευρίσκει) (najít, objevit) – a vymezuje tento pojem pomocí latinského – ars inveniendi (umění nalézání). (Pólya, 2004, s. 112) Jeho snahou je dát nový význam tomuto slovu a sám hovoří o *moderní heuristice* (*modern heuristic*), přičemž ji vymezuje jako *„snahu porozumět procesu řešení úloh, obzvláště pak mentálním operacím, které jsou typicky užitečné v tomto procesu“*[24] (Pólya, 2004, s. 130). Pojem heuristická strategie G. Póyla nepoužívá a sám hovoří o metodě, přičemž termín strategie si ponechává pro obecnější popis přístupu k řešení problémů, popř. úloh. V (Pólya, 1981, s. 29 druhého dílu) například tímto způsobem nahlíží strategii cesty zpět, kdežto v (Pólya, 2004, s. 225) hovoří ještě o metodě.

A. H. Schoenfeld (1985) píše o *strategiích řešení úloh* (*problem-solving strategies*) a mezi tyto strategie řadí i *heuristické strategie řešení úloh* (*heuristic strategies*). Upozorňuje však na skutečnost, že *„Zavádění heuristických strategií je mnohem komplexnější, než se na první pohled zdá. Například provádění strategie ‚prozkoumej jednodušší příbuznou úlohu‘ v sobě zahrnuje šest nebo sedm oddělených hlavních fází, přičemž každá z nich má potenciál působit těžkosti. Nácvik užití strategie musí v sobě zahrnovat nácvik všech jednotlivých částí a musí se mu věnovat tolik péče a pozornosti jako obvyklým předmětům výuky.“*[25] (Schoenfeld, 1985, s. 73)

Většina výzkumníků zabývajících se řešením úloh (v případě psychologů – problémů) obvykle vymezuje základní pojem *strategie řešení úlohy* (*problem solving strategy*, *problem-solving strategy*) jako pojem nadřazený ostatním a sousloví heuristická strategie (*heuristic strategy*) nepoužívá (Jonassen, 2011; Kaur, Har a Kapur, 2009; Kowalski, 1979; Lester, Garofalo a Kroll, 1989; Robertson, 2001; Tao, 2006; a jiní). Jako příklad uvádím strategii Pokus – ověření – korekce (*Guess – Check – Revise*, *Trial and Error*, *Guess and Check*, *Guess and Test*), kde nepanuje shoda v tom, kam

[23] (Pólya, 2004, s. vii)

[24] Modern heuristic endeavors to understand the process of solving problems, especially the mental operations typically useful in this process.

[25] The implementation of heuristic strategies is far more complex than at first appeal. Carrying out the strategy such as „exploiting an easier, related problem,“ for example, involves six or seven separate major phases, each of which is a potential cause of difficulty. Training in the use of the strategy must involve training in all of those phases, and the training must be given with at least as much care and attention as is given to standard subject matter.

tuto strategii zařadit. Někteří řadí tuto strategii ke strategii řešení úlohy (*problem solving strategy*), jiní pod heuristiku (*heuristic*), někteří hovoří o metodě (*method of problem solving*), další pak o procesu (*problem solving process*) či o přístupu (*problem solving approach*) anebo technice (*problem solving technique*). Domnívám se, že tato nejednotnost v zařazení vyplývá buď z prizmatu oboru, kterým na danou strategii nahlížejí jednotliví autoři, nebo navazují na práci někoho jiného, jehož výsledky dále využívají.

V česky psané literatuře se pro danou oblast ustálil termín *metody řešení matematických úloh* (Hecht a Sklenáriková, 1992; Herman, Kučera a Šimša, 2001, 2004; Larson, 1990; Odvárko, Calda, Šedivý a Židek, 1990; Příhonská, 2013; Volfová, 2000). J. Vyšín v (1972) hovoří o *metodice řešení matematických úloh* a v (1978) pojmenovává strategie (jak jsou vymezeny v této práci) jako složky matematické tvořivosti, tj. hovoří o tom, že např. analogie je složka matematické tvořivosti. F. Kuřina v (2011) uvádí, že řešení úloh má tvůrčí charakter a proto můžeme mluvit o *umění řešit úlohy*, což je pojem, který používají i P. Zeitz (2007) a S. Lehoczky a R. Rusczyk (2011; 2013).

S pojmem *heuristická strategie* se lze setkat v pracích J. Kopky (1999, 2013). Sám vymezuje použití heuristických strategií na základě heuristických úvah, které charakterizuje v tomto smyslu: „*Jsou to úvahy, pomocí nichž objevujeme řešení předložených problémů. Jsou to však úvahy, které nezaručují, že získané řešení je opravdu správné. Proto po objevu tohoto řešení musíme ukázat, že výsledek skutečně správný je.*“ (Kopka, 1999, s. 21)

Pro potřeby své práce vycházím z terminologie J. Kopky, avšak řadu názvů strategií členové výzkumného týmu pozměnili a některé strategie zcela přepracovali.

Heuristickou strategií rozumím takový proces, v jehož rámci je proveden nealgoritmický krok, který je závislý na řešiteli (obecně člověku). Nealgoritmický krok je obvykle vlastní danému jedinci a při stejné úloze ho mohou mít různí jedinci odlišný. Jako příklady nealgoritmického kroku uvádím: provedení experimentu, zjednodušení úlohy, vypuštění nějaké podmínky úlohy a podobně. V některých případech je při řešení úlohy použito více strategií. Pokud je nutné vymezit pouze jednu jedinou (například při kódování žákovských řešení), pak volím tu, která je v daném řešení stěžejní, byť není tak nápaditá.

Pokud není řečeno jinak, slovo strategie používám v práci v tomto zúženém kontextu.

1.3.2 Základní vymezení cest

Jak je uvedeno v úvodu, v rámci sledování žákovských řešení jsme si povšimli následující skutečnosti: v rámci řešení jedné úlohy užitím jedné konkrétní strategie žáci přistoupili k úloze rozdílně. Jeden si vystačil s aritmetikou, druhý do úlohy zavedl proměnnou a třetí si načrtl obrázek.

Řada autorů (Pólya, 2004; Schoenfeld, 1985; Lester, Garofalo a Kroll, 1989; Larson, 1983; Zeitz, 2007) považuje nakreslení obrázku (*draw a picture*, *draw a figure*) za samostatnou heuristiku. K mému pojetí mají o něco blíže A. S. Posamentier a S. Krulik (1998), kteří kreslení obrázku (*making a drawing*) nepovažují za samostatnou strategii, ale za vizuální reprezentaci (*visual representation*) situace.

Cestou (v užití heuristické strategie) pro potřeby mé práce rozumím způsob, jakým je daná heuristická strategie prováděna. V některých případech je v rámci jedné strategie použito více cest, a pokud je nezbytně nutné přiřadit řešení pouze jednu cestu, pak volím tu, o níž se domnívám, že je pro řešení úlohy stěžejní.

Je zřejmé, že cesty se neprojevují jen v případě heuristických strategií, ale i v ostatních případech, tj. v přímém způsobu řešení i v pokusu.

Aritmetická cesta

Řešení aritmetickou cestou je založeno na tom, že řešiteli stačí pouze aritmetika (číselné objekty) a k řešení nepotřebuje zavádět proměnnou nebo pracovat s nějakým obrázkem.

Zadání: Rozhodněte, který zlomek je větší: $\frac{124}{125}$, nebo $\frac{125}{126}$.

Řešení: Situace mezi čísly $\frac{124}{125}$ a $\frac{125}{126}$ je analogická (zatím intuitivně[26]) jako mezi čísly $\frac{2}{3}$ a $\frac{3}{4}$, kde je výsledek zřejmý.

Algebraická cesta

Při řešení úlohy algebraickou cestou si řešitel „vypomáhá" zavedením proměnné. V některých případech vede tento způsob k nalezení obecnějšího řešení, v jiných – pokud již podstata úlohy je algebraická – jen zavede řešitel o proměnnou navíc.

Zadání: Rozhodněte, který zlomek je větší: $\frac{124}{125}$, nebo $\frac{125}{126}$.

Řešení: Situace mezi čísly $\frac{124}{125}$ a $\frac{125}{126}$ je analogická (zatím intuitivně[27]) jako mezi čísly $\frac{n}{n+1}$ a $\frac{n+1}{n+2}$. Protože úloha je v obecnější rovině, lze předpokládat, že řešitel, který zvolil tuto strategii, je schopen dokázat vztah mezi oběma zlomky. Nabízím toto řešení:

Věta: $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}$.

Důkaz:

$$\begin{aligned} 0 &< 1 \\ n^2 + 2n + 0 &< n^2 + 2n + 1 \\ n(n+2) &< (n+1)^2 \\ \frac{n}{n+1} &< \frac{n+1}{n+2} \end{aligned}$$

Grafická cesta – ilustrativní obrázek

Podstatou ilustrativního obrázku je grafická reprezentace dané situace (úlohy), která nám umožní uvědomit si vztahy mezi vstupními objekty a cílem, nebo nám umožní získat vhled do úlohy. Podstatou ilustrativního obrázku je, že po zaznamenání si vstupních objektů a vztahů mezi nimi (dáno úlohou) již s obrázkem dále nemanipuluji (přikreslování, vybarvování apod.). Idea ilustrativního obrázku částečně koresponduje s vizuální reprezentací, jak ji používají A. S. Posamentier a S. Krulik (1998).

[26] Řešitel použil strategii analogie.

[27] Řešitel ve skutečnosti použil strategii zobecnění a konkretizace, viz kapitola 1.4.9.

Za ilustrativní obrázek lze v případě jednodušších úloh považovat i rozbor konstrukční úlohy.

Zadání: Hodiny v 5.00 bijí 5 úderů za pět sekund. Kolik času budou potřebovat tyto hodiny k odbití 10 úderů v 10.00? (Předpokládejme, že samotný úder se časově nepočítá (trvá 0 sekund).)[28] (Posamentier a Krulik, 1998, s. 140)

Řešení: Má zkušenost je taková, a výše uvedení autoři ji sami potvrzují, že první odpověď bývá 10 sekund. Ačkoliv úloha sama k tomu „nesvádí“, podívejme se na ilustrativní obrázek 1.7. Jednotlivé údery hodin jsou zobrazeny jako kolečka s vepsanými

Obrázek 1.7: Ilustrace úlohy bijících hodin

čísly. Jestliže pět úderů hodin trvá pět sekund a každý úder hodin netrvá (dle zadání úlohy) nic, potom veškerý čas je spotřebován na mezery mezi údery a ty jsou čtyři. Jedna mezera tudíž trvá $\frac{5}{4}$ sekundy. V 10.00 bijí 10 úderů, tedy mezi nimi je devět mezer. Pokud každá trvá $\frac{5}{4}$ sekundy, potom celý interval bití trvá $11\frac{1}{4}$ sekundy.

Grafická cesta – řešitelský obrázek

Základní ideou řešitelského obrázku je manipulace s obrázkem. Cílem není ilustrace počátečních podmínek úlohy, ale grafická vizualizace procesu řešení, kdy do obrázku zaznamenáváme kroky, o kterých předpokládáme, že vedou k řešení. Někdy je možné v rámci řešitelského obrázku experimentovat, jak dokládá E. Calda. „*Pedagogická zásada č. 93: Zíráme-li na obrázek představující rozbor konstrukční úlohy dostatečně dlouho a stále nic nevidíme, spojíme dva namátkově vybrané body a koukáme, jestli už něco vidíme. Jestliže ani teď nic nevidíme, spojujeme postupně další a další body tak dlouho, dokud něco neuvidíme, nebo dokud nevznikne taková změť čar, že už vůbec nic vidět nemůžeme. V tomto případě nakreslíme původní obrázek znovu, spojíme jiné dva body a celý postup opakujeme.*“ (Calda, 2003, s. 11)

Zadání: Vypočítejte obsah „kapky“, jejíž obvod tvoří kružnicové oblouky. Údaje na obrázku 1.8 jsou uvedeny v centimetrech.[29] [30]

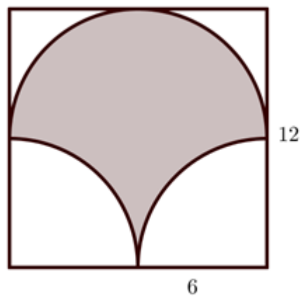
Řešení: Do obrázku si nakreslíme dvě úsečky[31], kterými rozdělíme obarvenou část na tři oblasti. Potom pouhým přesunem získáme nový objekt – viz obr. 1.9. Obsah kapky můžeme jednoduše spočítat jako obsah obdélníku o velikosti stran 6 a 12 cm.

[28]At 5:00, a clock strikes 5 chimes in 5 sec. How long will it take the same clock at the same rate to strike 10 chimes at 10:00? (Assume that the chime itself takes no time.)

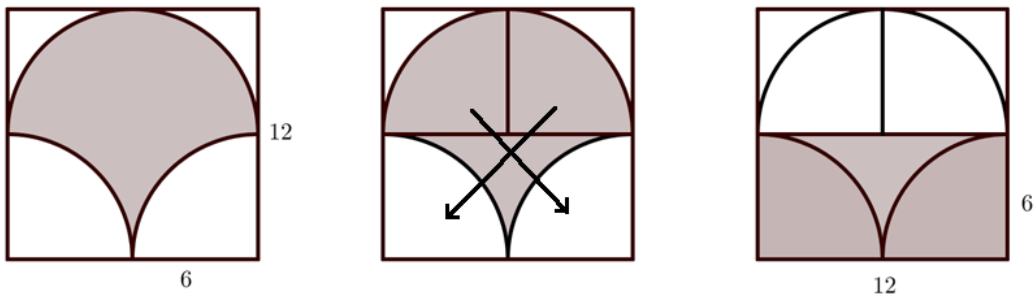
[29]Zadání úlohy je převzato z (Maláč a Kurfürst, 1981, s. 79)

[30]Úloha byla publikována v (Eisenmann, Novotná a Přibyl, 2015; Přibyl a Ondrušová, 2014; Novotná et al., 2013).

[31]Řešitel používá strategii Zavedení pomocného prvku.



Obrázek 1.8: Kapka



Obrázek 1.9: Manipulace s kapkou

Grafická cesta – využití grafu funkce

Tento způsob provádění strategie je zcela specifický, neboť ke svému řešení využívá grafů funkcí. Funkce může mít ilustrativní charakter, ale obvykle se s celým „obrázkem" dále pracuje, přikreslí se další graf (jiné) funkce apod.

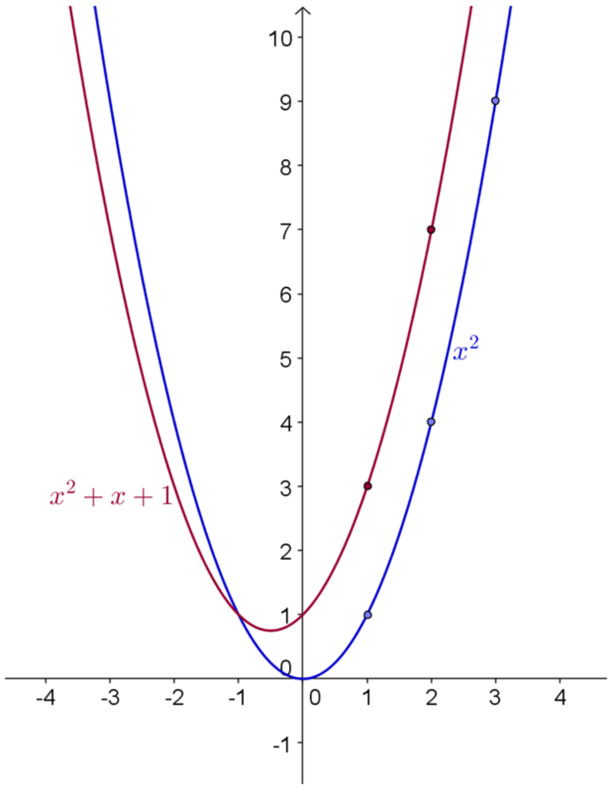
Zadání: Může být $n^2 + n + 1$ pro nějaké přirozené číslo $n \geq 1$ druhou mocninou přirozeného čísla? (volně podle (Kuřina, 2011, s. 151))

Řešení: Čísla $n^2 + n + 1$ můžeme chápat jako funkční hodnoty kvadratické funkce $y = x^2 + x + 1$, pro přirozené argumenty x. Uspořádané dvojice $[x, x^2 + x + 1]$, které tvoří tuto funkci, tudíž leží na parabole o rovnici $y = x^2 + x + 1$ (viz obrázek 1.10). Ta zřejmě nemá pro kladná x žádný společný bod s parabolou[32] $y = x^2$, na které leží uspořádané dvojice $[x, x^2]$. Z hlediska provedených experimentů, které probíhaly na ZŠ i SŠ, se této cestě věnuji v práci minimálně, neboť nebylo možné provést smysluplné srovnání.

1.3.3 Základní vymezení prostředků

Pojmem *prostředek* (v užití heuristické strategie) myslím nástroj, kterým je užití dané heuristické strategie v rámci cesty provedeno. Například při zavedení pomoc-

[32]Řešitel používá strategii Zavedení pomocného prvku.



Obrázek 1.10: Grafy funkcí $y = x^2 + x + 1$ a $y = x^2$

ného prvku do úlohy (viz kapitola 1.4.12, s. 74) a použití grafické cesty – využití grafu funkce, lze tento graf sestrojit na papíře nebo v grafickém kalkulátoru či na PC.

Někteří žáci jsou schopni nepoužívat k řešení žádný z uvedených prostředků a veškeré kroky řešení provádět „zpaměti“. V rámci experimentu byli i tito žáci žádáni, aby veškeré své kroky zapisovali.

Protože v experimentálních třídách se nenaskytly stejné podmínky, použité prostředky nebyly v rámci experimentu vyhodnocovány. Jediný prostředek, který byl dostupný všem, byl papír a tužka.

Papír a tužka

Tímto pojmem označuji používání běžných školních pomůcek, kdy dochází k rozlišitelnému (řešitelem a předkladatelem) záznamu jednoho média na druhé. Obvykle tím prvním médiem je nosič pigmentové stopy – tužka, propiska, pero, křída, el. pero, tím druhým médiem je záznamové médium – papír (v různých podobách), tabule, snímač el. pera apod. Řadím sem také prostředky, které jsou specifické pro určité skupiny, např. v případě zrakově handicapovaných se jedná o Pichtův psací stroj, vypichovátko, obtahovací barvy na sklo, pegboard, ... Rozlišujícím znakem je, zda se jedná o běžnou školní pomůcku pro danou skupinu žáků. Pokud ne, např. použití pegboardu[33] v běžné třídě, pak hovořím o prostředku model.

Kalkulátor

Tímto pojmem označuji kalkulačky, které nemají grafický výstup ve smyslu kreslení grafů funkcí. Může se jednat o obyčejné sčítačky, ale i kalkulátory, které mají algebraický mód. Při řešení úloh v experimentální části byl povolen pouze prostředek papír a tužka.

Grafický kalkulátor

Toto zařízení v mé klasifikaci označuje kalkulačky, které mají možnost buď vykreslovat grafy funkcí, nebo mají mód pro dynamickou geometrii. Základním rozlišujícím znakem je, že do těchto přístrojů nelze nahrát dodatečný SW ve smyslu programu.

Osobní počítač

Toto elektronické zařízení je charakteristické tím, že do něj lze nahrát dodatečný SW. Sem patří nejen klasické PC v různých provedeních (PC, notebook, netbook, ...), ale i další zařízení jako komunikátory (lepší telefony, smartphony, ...) a dotyková zařízení (tablety). Vzhledem k vývoji technologií začíná být hranice mezi jednotlivými skupinami neostrá. V našem experimentu pouze jedna třída měla k dispozici PC po dobu výuky (Milanova třída) a proto ani tento prostředek nebyl sledován.

Model

Tímto pojmem pro potřeby disertační práce označuji prostředek vytvořený pro specifické vzdělávací prostředí (např. zrakově handicapovaní). Pro některé skupiny žáků je jedno určité prostředí standardní, pro jiné neobvyklé a pro jinou skupinu je již modelem. Například prostředkem při vzdělávání zrakově handicapovaných je již výše zmíněný pegboard. Dalším modelem, který já sám rád užívám, je překládání papíru.

1.3.4 Vlastnosti strategií

Jedním z cílů, které si kladu v práci, je popsat postupy, jak rozpoznat, které způsoby užití strategie jsou vhodné pro jednotlivé žáky. Nejen studiem literatury, ale i vlastním pozorováním jsem dospěl k názoru, že různé strategie (a cesty jejich použití) kladou na řešitele různé nároky a jejich úspěšnost při správném použití je v daných případech různá. Tyto postřehy jsme nejprve diskutovali v rámci pracovních setkání výzkumného týmu a poté jsme výsledky publikovali v práci (Přibyl a Eisenmann, 2014). Později již docházelo k minimálním změnám ve vymezení.

[33] Pegboard je dřevěná deska, která má v mřížových bodech vyvrtány díry, do kterých se vkládají kolíčky. Na tyto kolíčky je potom možné natáhnout provázek, gumičku apod. Používají ji zrakově handicapovaní ve výuce.

Každou heuristickou strategii lze popsat pomocí atributů, které pracovně nazývám *vlastnosti strategie*, a jejichž míra může být odstupňována hodnotami 1 až 5.

Množství nutných znalostí – tato vlastnost popisuje, kolik musí mít řešitel nutných znalostí pro úspěšné použití strategie. Nemíním tím znalost strategie – tu budu vždy předpokládat, ale znalosti z různých matematických i nematematických oblastí. Strategie, které mají tuto hodnotu nízkou – 1, nepotřebují žádné dodatečné znalosti.

Množství nutných zkušeností – tato vlastnost popisuje, kolik musí mít řešitel nutných zkušeností pro úspěšné použití strategie. Řešitel zkušenosti získává jako zpětnou informaci o užívání strategií, tedy tato vlastnost, na rozdíl od předchozí se vždy vztahuje ke konkrétní strategii.

Možnost naučit (se) strategii opakováním – daná hodnota vyjadřuje míru úspěšnosti naučení (se) strategie pravidelným opakováním. Strategie, které mají algoritmický charakter, se dají snáze naučit právě pravidelným procvičováním.

Riziko nesprávného použití – daná hodnota označuje míru nebezpečí nesprávného použití strategie. Nesprávným použitím strategie míním aplikaci daného postupu při řešení úlohy, kdy se to vůbec nehodí. Některé, zejména algoritmické strategie, mají toto riziko malé, neboť pravidelným opakováním získá řešitel nejenom dovednost aplikovat danou strategii, ale také schopnost rozpoznat, zda je úloha k řešení tímto způsobem vhodná. Uvědomuji si, že je velmi obtížné stanovit míru tohoto rizika vůči řešiteli, neboť u každého řešitele je tato hodnota různá. Námi uváděná hodnota je „pokusem“ o stanovení „absolutní“ míry nesprávného nasazení.

Úspěšnost použití strategie – daná hodnota popisuje, jaká je jistota nalezení správného řešení při správném použití strategie. I v tomto případě se jedná o pokus stanovit „absolutní“ míru této vlastnosti, která je nezávislá na řešiteli.

Jak již bylo zmíněno výše, nejprve byl proveden prvotní odhad hodnot jednotlivých ukazatelů. Jednotlivými iteracemi jsme postupně měnili hodnoty, až získaly podobu, kterou předkládám v tabulce 1.2. Jednotlivé iterační kroky byly prováděny na základě informací (dat), které jsme získali z experimentů a z rozhovorů s učiteli.[34]

Hodnoty ukazatelů lze interpretovat následovně:

1 málo, nejméně;
2 dostatečně, podprůměrně;
3 průměrně;
4 poměrně dost, nadprůměrně;
5 hodně, nejvíce.

Interpretaci hodnot z tabulky 1.2 ilustruji na příkladu dvou strategií.

[34] V přípravné fázi tabulka jako taková obsahovala více strategií, ale protože u řady strategií nebyl proveden experiment, tak uvedené hodnoty byly pouze subjektivním odhadem.

strategie	znalost	zkušenost	opakování	chybovost	úspěšnost
Analogie	3	3	4	3	4
Cesta zpět	2	3	4	3	4
Pokus – ověření – korekce	1	1	5	1	5
Přeformulování úlohy	5	5	1	5	4
Systematické experimentování	2	2	5	1	5
Užití falešného předpokladu	2	2	5	2	5
Vypuštění podmínky	3	3	2	4	4
Zavedení pomocného prvku	3	4	2	1	5
Zobecnění a konkretizace	5	4	2	1	5
Konkretizace a zobecnění	3	3	3	2	4

Tabulka 1.2: Vlastnosti strategií

Strategie Pokus – ověření – korekce: k její správné aplikaci nejsou potřeba žádné další znalosti (začít experimentovat může řešitel s tím, co zná); také množství dřívějších zkušeností je minimální, i když nemá s obdobným typem úlohy žádné zkušenosti, nebrání mu to v tom, aby začal experimentovat. Experiment prokázal, že je možné opakováním naučit tuto strategii a s úspěchem ji používat. Z hlediska školní úspěšnosti závisí na předkladateli (učiteli), zda a do jaké míry tuto strategii akceptuje, obvykle to závisí na roli, kterou tato úloha má. Hledisko rizika nesprávného použití strategie je minimální. Strategii je možné použít při řešení většiny školských úloh. Při správném použití strategie (ve školském prostředí) je úspěšnost vysoká. Řešitel experimentováním buď úlohu může přímo vyřešit, nebo získá vhled do úlohy a potom již dokáže vyřešit úlohu přímo. Na základě těchto hodnot se domnívám, a experiment to do jisté míry potvrdil, že tato strategie je vhodná pro většinu žáků včetně těch, kteří mají nízkou školní úspěšnost.

Strategie Přeformulování úlohy: k její správné aplikaci je zapotřebí mít velké množství znalostí z různých oblastí matematiky. Je také zapotřebí, aby řešitel měl zkušenost s přeformulováváním úlohy ať už ve smyslu kontextu, nebo dokonce jazyka. Vzhledem k povaze strategie – není algoritmická – je velmi obtížné naučit strategii opakováním. Experiment ukázal, že žáci ve vzorku toho nebyli schopni. Je také poměrně velké riziko nesprávného použití. Toto riziko lze zmenšit zkušeností a znalostmi, avšak zůstává nezanedbatelné. Osobní zkušenost ukazuje, že pokud je úloha vhodně přeformulovaná, pak je úspěšnost řešení poměrně vysoká. Z uvedeného vyplývá, že strategie není vhodná pro každého a není vhodná pro každou úlohu. Jednoduché úlohy nemá význam řešit tímto způsobem. Domnívám se na základě své pedagogické praxe, že strategie je vhodná především pro úlohy „olympijského“ typu a jejich řešitele.

Dělení strategií do skupin jsem provedl podle ohodnocení prvních tří vlastností, přestože je možné uskupit strategie i podle jiných kombinací vlastností (např. naučitelnost opakováním a úspěšnost).

První skupina je tvořena strategiemi Pokus – ověření – korekce, Systematické experimentování a Užití falešného předpokladu. Tyto strategie je poměrně snadné se naučit a pochopit jejich podstatu. Také jejich použití obvykle vede k cíli a i výkonově (z hlediska školního výkonu) slabší žáci se jim naučí.

Druhá skupina strategií je tvořena strategiemi Analogie, Cesta zpět, Vypuštění podmínky, Konkretizace a zobecnění. Tyto strategie je možné předkládat žákům a poměrně velká část žáků je s to je pochopit a naučit se používat. Nejobtížnější je strategie Vypuštění podmínky, neboť řešitel již musí být schopen oddělit od sebe jednotlivé omezující podmínky úlohy. Tato skupina strategií již vyžaduje určitý vhled do úlohy, kdy řešitel musí být schopen vlastní tvůrčí práce.

Třetí skupina je tvořena strategií Zavedení pomocného prvku. Do této skupiny spadají i strategie Rozklad na jednodušší případy a Využití extrémních případů, které však nebyly vyzkoušeny v experimentu a závěry jsou pouze hypotetické. Z tohoto důvodu také byly z tabulky 1.2 vyjmuty. Strategie ve třetí skupině jsou obtížněji naučitelné a od řešitele již vyžadují (obecně) nemalý vhled do úlohy. U Zavedení pomocného prvku se ukazuje, že v případě grafické cesty je možné dosáhnout u určité třídy úloh jistého cviku při zavádění pomocného prvku.

Čtvrtá skupina strategií je tvořena strategiemi Přeformulování úlohy a Zobecnění a konkretizace. Jedná se o strategie, kdy od řešitele je vyžadován vhled do úlohy, velké množství znalostí a zkušeností a experiment na daném vzorku ukázal, že není snadné se jim naučit.

1.3.5 Základní rozdělení strategií

První rozměr (viz kapitola 1.3, s. 32) řešení úloh užitím heuristické strategie je popsán v předchozí části, přičemž součástí popisu je i přehled strategií, kterým se v práci věnuji. Problematika strategií je však daleko bohatší, proto cílem této kapitoly je popsat a rozdělit tyto strategie.

Z hlediska řešení úloh dělím strategie na obecné a specifické. G. Pólya ve své práci (2004) uvádí poměrně velký počet různých strategií, aniž by je nějakým způsobem klasifikoval. Stejně tak další autoři, i když hovoří např. o metodách či principech, nerozdělují strategie do skupin.

Dle dříve uvedeného vymezení je klíčovým prvkem klasifikace fakt, zda je použití dané strategie omezeno buď z hlediska jejího vnitřního obsahu, nebo z hlediska typu úloh, kde může být tato strategie s úspěchem použita.

Protože náš tým vycházel z prací G. Pólyi, A. H. Schoenfelda a J. Kopky, strategie, které předkládám v této práci, odpovídají jejich pojetí. Jiní autoři uvádějí další strategie, ať už vycházejí z výše zmiňovaných autorů a jejich strategie modifikují, nebo sami navrhují nové. V řadě případů autoři uvádějí jak obecné tak specifické strategie. Kromě G. Pólyi jsou to také L. C. Larson (1990), P. Vrábel (2005), P. Zeitz (2007) a jiní. Za zmínku ještě stojí, že G. Pólya v (2004) uvádí jak různé způsoby zkoumání, tak i různé způsoby dokazování a klade je na roveň strategiím. Zkoumání a dokazování dále nezmiňuji.

Obecné strategie

Základní charakteristikou obecných strategií je skutečnost, že nejsou vázány na žádný konkrétní typ úlohy a obvykle také proces jejich aplikace v sobě nenese specifický matematický aparát. Domnívám se, že strategie, které uvádím, jsou předatelné žákům běžných tříd.

Z přehledu strategií na straně 32 mezi obecné strategie patří:

- Pokus – ověření – korekce;
- Systematické experimentování;
- Analogie;
- Přeformulování;
- Konkretizace a zobecnění;
- Zobecnění a konkretizace;
- Cesta zpět;
- Zavedení pomocného prvku;
- Vypuštění podmínky.

Vzhledem k tomu, že těmto strategiím se podrobněji věnuji ve vlastní kapitole, zaměřím se nyní na další strategie. Jednou z nich je *Rozklad na jednodušší případy* (*decomposition (into smaller problems)*) (např. (Pólya, 2004)). Podstatou je, že se daná úloha rozloží na dílčí (jednodušší) úlohy, které je potom možno řešit samostatně. V řadě případů nezáleží na pořadí řešení dílčích úloh.

Další strategií je *Využití krajního případu* (*extreme case*) (např. (Pólya, 2004)), která velmi často umožní řešiteli získat vhled do úlohy. U řady úloh lze zkoumat konkrétní naplnění úlohy a právě mezní případy dají řešiteli možnost získat vhled do úlohy a nasměrují ho k dalšímu řešení, nebo se úloha stane jednodušší a řešitel ji vyřeší.

Dále uvedené „pobídky, výzvy, nápovědy“, vnímám spíše jako návrh, jak postupovat při řešení problému, neboť se domnívám, že se jedná spíše o pokyny, které učitel dá řešiteli. Pobídka *vrať se k definicím* (*go back to definitions*) (Pólya, 2004) nabádá řešitele, aby si ujasnil, co jednotlivé pojmy v úloze znamenají. V řadě případů je daný matematický objekt – např. parabola – možné definovat více způsoby a jedna z definic může být vhodnější pro řešení úlohy než ostatní.

Druhá pobídka je obdobná té první a jedná se z mého pohledu o pokyn, který má navést tápajícího řešitele k řešení úlohy. Pobídkou *Použil jsi všechny informace?* (*Did you use all the data?*) nabádá [učitel] řešitele, aby se vrátil k zadání úlohy a ověřil, zda opravdu použil všechny (relevantní) údaje. V případě, že u řešitele trénujeme čtení s porozuměním úloze a dovednost separace důležitých údajů, může úloha obsahovat i nadbytečné údaje.

Specifické strategie

Základní charakteristikou specifických strategií je skutečnost, že jsou vázány buď na konkrétní matematický obsah, nebo v jejich pozadí je zcela konkrétní matematický aparát, někdy nazývaný princip. Toto pojetí odpovídá metodám řešení úloh, jak jsou vymezeny např. v (Herman, Kučera a Šimša, 2001, 2004; Hecht a Sklenáriková, 1992; Lehoczky a Rusczyk, 2011; Rusczyk a Lehoczky, 2013; Engel, 1998; a další).

Se specifickými strategiemi se můžeme setkat na stránkách knih věnovaných matematické olympiádě či jiným matematickým soutěžím. Domnívám se, že strategie předkládané v této práci mohou být předloženy žákům běžných tříd, neboť jejich matematické pozadí umožňuje snadnější uchopení žákem než jiné strategie. V případě *Užití parity* jsme testovali v rámci prováděných experimentů jednu úlohu. V případě *Dirichletova principu* (v jeho jednodušší podobě, kde $k = 1$) jsem provedl experiment (mimo experimenty v projektu) s vybranými žáky jedné střední školy.

V této práci sleduji jedinou specifickou strategii – *Užití falešného předpokladu*, protože se ji podařilo zařadit mezi experimentální strategie.

První ze specifických strategií je *Užití symetrie* (*symetry*). Cílem strategie je zjistit, zda v úloze k některým prvkům neexistují symetrické prvky, které by ji umožnily řešit, nebo zda není možné využít symetrii přímo k řešení. G. Pólya nemá na mysli pouze geometrickou symetrii, ale symetrii obecně – např. u mnohočlenů apod.

Další velmi často užívaná strategie je *Dirichletův princip* (*holubníkový princip*, *přihrádkový princip*), jejíž idea je založena na faktu, že pokud se rozdělí $kn+1$ objektů do n tříd, potom alespoň v jedné třídě je $k + 1$ objektů.

Poslední mnou zmíněnou strategií je *Užití parity*. Řešení řady úloh je založeno na skutečnosti, že řada objektů se vyskytuje v sudém/lichém počtu.

1.4 Konkrétní heuristické strategie

Jak již bylo zmíněno dříve, mezi heuristickými strategiemi můžeme najít takové, které mají k sobě blíže. První skupinu tvoří strategie, které jsou založeny na provádění pokusů (*trials*). Taková provádění pokusů nazývám *experimentování* a skupinu jako takovou nazývám *experimentální strategie*. Následující tři strategie patří do skupiny experimentálních strategií.

1.4.1 Pokus – ověření – korekce (POK)

Základní idea strategie se opírá o skutečnost, že při vhodně provedené sérii experimentů má řešitel poměrně velkou šanci se dobrat požadovaného řešení. Z mého pohledu se jedná o strategii, která je relativně univerzální a kterou lze použít při řešení celé škály úloh.

Použití této strategie je ukázáno řadou autorů na řešení konkrétních úloh. Z počátku se G. Pólya (1954, 1968, 2004) nevyjadřuje o strategii jako takové, ale upozorňuje na důležitost provádění pokusů. Teprve v práci (Pólya, 1981) se zmiňuje o způsobu řešení, které nazývá pokus a omyl (*trial and error*). Vymezení G. Pólyi plně koresponduje s vymezením, které je uvedeno níže.

„[Pokus a omyl] se ve skutečnosti skládá ze série pokusů, kde každý následující se snaží napravit chybu předchozího pokusu, a lze říci, že chyby se zmenšují a postupující pokusy jsou blíž a blíž očekávanému výsledku.“[35] (Pólya, 1981, s. 29)

V závislosti na svém vymezení potom navrhuje, že na místo označení „pokus a omyl“ by se mělo spíše užívat „postupné zkoušení“ (*successive trial*), „postupné zlepšování“ (*successive correction*) nebo „postupná aproximace“ (*successive approximation*). Upozorňuje však na skutečnost, že metodou postupné aproximace (*method of successive approximation*) se může nazývat jakákoliv činnost, kde dochází ke zlepšování výsledků, a jako příklad uvádí vyhledávání ve slovníku.

Obdobně se k této strategii staví i další autoři a v řadě případů ji více rozvádějí. Prvním z nich je A. Schoenfeld (1982), který tuto strategii nazývá pokus a omyl (*trial and error*) a tento přístup k řešení úloh zakládá na odhadu podloženém intuicí (*intuition-based conjectures*). Tyto odhady provádí v daném pokusném prostoru (*trial space*) a právě vhodné vymezení pokusného prostoru je pro tuto strategii důležité. Domnívám se, že úspěšnost užití tohoto přístupu je vztažena k velikosti pokusného prostoru, tj. čím menší prostor, tím větší šance na úspěch.

Dalším z autorů je význačný soudobý matematik T. Tao. Ten ve své práci (Tao, 2006) využívá strategii pokus a omyl (*trial-and-error*) v případech, kdy buď přímý způsob řešení překračuje možnosti řešitele, nebo provedené pokusy umožňují získat lepší vhled do úlohy. Zatímco G. Pólya, A. Schoenfeld a T. Tao tuto metodu nijak nehodnotí, I. Robertson (2001) provádí určité roztřídění „strategií“ a tuto řadí mezi takzvané slabé metody (*weak methods*) řešení úloh, a právě o metodě pokus a omyl (*trial and error method*) říká, že *„je vůbec nejslabší metodou, kterou lze pracovat“*[36] (s. 28).

J. Hayes (1981) upozorňuje, že podstata této strategie spočívá v hledání pomocí pokusu a omylu (*trial and error search*). Toto vymezení koresponduje s jeho psychologickým pohledem na řešení problémů (nejen ve smyslu matematických úloh), kdy udává, že řešitel hledá výsledek (*search for the solution*). Nadále ukazuje, že tento přístup k řešení úloh má dvě formy: slepé hledání (*blind form of search*) a systematické hledání (*systematic form of search*). Strategie POK, tak jak ji vnímám já, je z počátku založena na slepém hledání, avšak dále již postupuje určitým systémem.

P. Zeitz (2007) tuto strategii s úspěchem užívá při řešení algebraických úloh různého charakteru, obvykle však pouze pro nalezení alespoň jednoho řešení a následně na ni navazuje jinou strategií, popř. používá přímý způsob řešení. P. L. Ferrari (1992) hodnotí tuto strategii jako dětskou strategii řešení úloh a očekává postupný příklon k efektivnějším algoritmům řešení.

M. Hejný a kol. (1990) uvádí strategii pokus—omyl v souvislosti s řešením rovnic; autoři ji považují za první metodu řešení rovnic a ve spojení s intuicí ji nahlíží jako fylogenetickou propedeutiku rovnic za použití aritmetiky.

[35] In fact, it consists of a series of trials, each of which attempts to correct the error committed by the preceding and, on the whole, the errors diminish as we proceed and the successive trials come closer and closer to the desired final result.

[36] ... which is about as weak a method as you can get.

O smysluplnosti experimentování při řešení úloh se zmiňují J. Houska a kol. (1985), kdy uvádějí, že „*…pokus patří mezi pracovní metody matematiky,…*“ (s. 27) a proto má význam se s ním seznamovat v souvislosti s řešením úloh.

K experimentování v matematice se vyjadřuje také J. Vyšín (1978) a považuje takové experimentování za složku matematické tvořivosti, i když ho využívá jako nástroj k řešení úloh.

Vymezení strategie

Strategie POK je založena na opakovaném experimentování, jeho následném vyhodnocení a případném provedení opravy. Pokud při prvním experimentu řešitel nenalezne požadovaný výsledek, jedná se o vícekrokovou strategii, kdy každý krok se skládá ze tří fází (poslední jen ze dvou).

- Ve fázi *pokus* řešitel provede experiment, tj. řeší úlohu se zvolenou hodnotou.
- Ve fázi *ověření* řešitel ověří, zda jím zvolená hodnota není výsledkem. Pokud hodnota vyhovuje, experimentování ukončí. Pokud hodnota nevyhovuje, potom řešitel přistoupí ke třetí fázi.
- Ve fázi *korekce* řešitel provede korekci zvolené hodnoty, tj. vznikne nová hodnota a vytvoří tak podmínky pro provedení dalšího experimentu. Předpokládá se, že řešitel nebude korekci provádět nahodile, ale hodnoty zvolí tak, aby se dalším experimentováním přibližoval k očekávanému výsledku. Opět následuje fáze pokus.

Je zřejmé, že úspěšnost této strategie je závislá na řešiteli. Ten volí pokusný prostor, počáteční hodnotu a také v každém kroku (sám) provádí korekci. Tyto tři atributy použití strategie jsou závislé na zkušenosti řešitele a navíc se mohou navzájem ovlivňovat. Nejprve řešitel zvolí prostor, ve kterém bude provádět pokusy, následně provede volbu počáteční hodnoty a experimentuje. Po ověření provede korekci, v rámci čehož může dojít ke změně pokusného prostoru (zúžení/rozšíření). Počáteční hodnotu volí řešitel v závislosti na míře vhledu do úlohy. Lze očekávat, že čím je větší míra vhledu do úlohy, tím volená hodnota je blíže požadované.

Úloha ilustrující strategii

Zadání: Máme připravit 50 kg bonbónové směsi v ceně 120 Kč za jeden kilogram. K dispozici máme dva druhy bonbónů, první v ceně 90 Kč za jeden kilogram, druhý v ceně 140 Kč za jeden kilogram. Kolik každého druhu je třeba smíchat? (Cihlář a Zelenka, 1998, s. 94)
Řešení: Řešení je schematicky rozepsáno do jednotlivých kroků.

1. krok
   (a) Pokus: Vezměme 25 kg levnějších bonbónů a 25 kg dražších bonbónů.
   (b) Ověření: Jaká je cena jednoho kilogramu této směsi? $25\cdot 90+25\cdot 140 = 5750$; $5750 : 50 = 115$. To je méně, než je požadovaná cena.

(c) Korekce: Je potřeba přidat dražší bonbóny. Tedy 15 kg levnějších a 35 kg dražších bonbónů.

2. krok

   (a) Pokus: vezměme 15 kg levnějších bonbónů a 35 kg dražších bonbónů.
   (b) Ověření: jaká je cena za kilogram? $15 \cdot 90 + 35 \cdot 140 = 6250$; $6250 : 50 = 125$. To je více než je požadovaná cena.
   (c) Korekce: je potřeba ubrat dražší bonbóny. Tedy 20 kg levnějších a 30 kg dražších bonbónů.

3. krok

   (a) Pokus: vezměme 20 kg levnějších bonbónů a 30 kg dražších bonbónů.
   (b) Ověření: jaká je cena za kilogram? $20 \cdot 90 + 30 \cdot 140 = 6000$; $6000 : 50 = 120$. Dosáhli jsme požadované ceny.

Výsledek: Je třeba smíchat 20 kg levnějších a 30 kg dražších bonbónů.

Zápis (hypotetického) řešení žákem: Pokud má být 50 kg za 120 Kč, potom všechny bonbóny budou stát 6000 Kč. Jestliže vezmu 25 kg levnějších (cena 2250 Kč) a za 25 kg dražších (cena 3500 Kč), tak celková cena směsi je 5750 Kč. To je málo. Tak vezmu 15 kg prvních bonbónů (cena 1350 Kč) a 35 kg druhých bonbónů (cena 4900 Kč), pak celková cena směsi je 6250 Kč. To je moc. Zkusím tedy smíchat 20 kg prvního typu (cena 1800 Kč) a 30 kg druhého typu (cena 4200 Kč). Potom je celková cena směsi 6000 Kč a to je ono.

1.4.2 Systematické experimentování (SE)

Stejně jako strategie POK, tak i SE spadá do skupiny experimentálních strategií.[37]

V odborné literatuře nebývá zvykem rozlišovat mezi strategiemi POK a SE. Obě lze zahrnout pod obvyklou strategii pokus a omyl. Jak již bylo zmíněno v předchozí kapitole 1.4.1 a jak bude vysvětleno dále, mezi strategiemi je přece jen určitý rozdíl. Rozlišení mezi těmito strategiemi lze nalézt v práci J. Hayese (1981), který kromě metody pokus a omyl hovoří též o metodě bezprostředního kroku (*proximity method*). Tato metoda je založena na skutečnosti, že opravnou hodnotu volíme jako nejbližší možnou.

Vymezení strategie

Strategie SE je založena na opakovaném experimentování, jejich následném vyhodnocení a případném provedení opravy. Pokud při prvním experimentu řešitel nenalezne požadovaný výsledek, jedná se o vícekrokovou strategii, kdy každý krok se skládá ze tří fází (poslední jen ze dvou).

- Ve fázi *pokus* řešitel provede experiment, tj. řeší úlohu se zvolenou hodnotou.

[37] Určité části vymezení strategie byly publikovány v (Eisenmann a Přibyl, 2013).

- Ve fázi *ověření* řešitel ověří, zda jím zvolená hodnota není výsledkem. Pokud hodnota vyhovuje, experimentování ukončí. Pokud hodnota nevyhovuje, nastává třetí fáze.
- Ve fázi *korekce* vznikne nová hodnota, která vytvoří podmínky pro provedení dalšího experimentu. Korekci jako takovou neprovádí však řešitel, ale samotná metoda. Korekce je totiž provedena automaticky na nejbližší možnou hodnotu ve smyslu nastavení řešitelem. Opět následuje fáze pokus.

Podstatou SE je uvědomění si faktu, že k výsledku lze dojít pomocí systému v provádění pokusů, který je založen na minimální úpravě předchozího kroku. Síla této strategie se ukazuje ve spojení s počítačem, který nám umožňuje realizovat pokusy v reálném čase. V případě aritmetických experimentů se jeví jako vhodný nástroj libovolný tabulkový procesor, který umožňuje vytvářet seznamy. Potom každý řádek tabulky představuje jeden experiment. Tyto experimenty je možné provádět i ručně, ale výrazně se tím prodlouží doba řešení úlohy.

Úspěšnost této strategie je závislá na řešiteli do té míry, jak vhodně zvolí pokusný prostor. V závislosti na volbě pokusného prostoru potom dochází i k volbě počáteční hodnoty a objevení pravidla, jak volit hodnotu pro následující experiment. Z tohoto úhlu pohledu klade strategie SE na řešitele vyšší nároky, viz kapitola 1.3.4 (39) o vlastnostech strategií. Během řešení již (obvykle) nedochází ke změně pokusného prostoru. Ten volí řešitel v závislosti na míře vhledu do úlohy.

Velmi často se o užití počítače v rámci systematického experimentování mluví jako o použití tzv. *hrubé síly* (*brute force*). Řešení hrubou silou vymezuji jako vyčerpávání jednotlivých možností z množiny všech potenciálních výsledků, přičemž množina, ve které provádíme experimenty, je obvykle konečná. Ve světle použití hrubé síly můžeme i pozměnit nahlížení strategie SE jako takové.

- *Úlohy jsou řešeny pouze pomocí hrubé síly* (zkoumání všech možností) – potom se nejedná o SE v pravém slova smyslu, neboť řešitel neprovádí fázi ověření. Po provedení experimentu se automaticky vygeneruje korekce, tj. posun na další nejbližší hodnotu, a opět se provede experiment. Po vyčerpání všech možností řešitel projde celou množinu experimentů a vybere ten, který je výsledkem úlohy. Do této kategorie spadají také úlohy, které nazývám *důkaz hrubou silou*. Úloha požaduje dokázání určité věty, která se vyjadřuje o konečném počtu stavů.
- *Úlohy řešené pomocí hrubé síly s odůvodněním ukončení experimentování* (zkoumání jisté podmnožiny možností) – tento způsob užití hrubé síly překrývá s mým vymezením strategie SE.
- V řadě případů dochází k tomu, že množina všech potenciálních výsledků je nekonečná nebo není diskrétní. V tom případě je zřejmé, že řešitel nemůže vyčerpat všechny možnosti. Přesto užití této metody, obzvláště ve spojení s výpočetní technikou, může řešiteli poskytnout užitečné informace. Řešitel může získat vhled do úlohy, na jehož základě může formulovat hypotézu. Pak v závislosti na možnostech řešitele buď zůstává tato hypotéza na přijatelné[38] úrovni,

[38]Řešitelem přijímané bez pochyb.

nebo ji řešitel potvrdí (popř. vyvrátí). Je to tedy typ úloh, kde *systematické experimentování vede k formulaci hypotézy.*

Úloha ilustrující užití hrubé síly

Zadání: Máme připravit 50 kg bonbónové směsi v ceně 120 Kč za jeden kilogram. K dispozici máme dva druhy bonbónů, první v ceně 90 Kč za jeden kilogram, druhý v ceně 140 Kč za jeden kilogram. Kolik každého druhu je třeba smíchat? (Cihlář a Zelenka, 1998, s. 94)

Řešení: K řešení využijeme tabulkový procesor, ve kterém vyplníme první dva řádky. Potom vytvoříme automaticky generovaný seznam, kterým provedeme jednotlivé experimenty[39]. Přestože to není v úloze explicitně uvedeno, předpokládejme, že řešení je celočíselné z pohledu kilogramů. Pokud by tomu tak nebylo, lze zjemnit krokování (provádí se úpravou třetího řádku v prvním sloupci; poté následuje vytvoření nového seznamu) a změnu lze provádět po gramech nebo po desetinách gramů.

V tabulce 1.3[40] uvádím vzorce tak, jak jsou zapsány v tabulkovém procesoru. Druhý řádek, který reprezentuje vzorce, je v tabulkovém procesoru nahrazen hodnotami.[41]

hmotnost (kg)		cena (Kč)		cena (Kč)	
1. druh	2. druh	1. druh	2. druh	celé směsi	za 1 kg směsi
0	=50-A3	=A3*90	=B3*140	=C3+D3	=E3/50
1	49	90	6860	6950	139
2	48	180	6720	6900	138
...	...	...	...	...	...
19	31	1710	4340	6050	121
20	30	1800	4200	6000	120
21	29	1890	4060	5950	119
...	...	...	...	...	...
49	1	4410	140	4550	91
50	0	4500	0	4500	90

Tabulka 1.3: Řešení úlohy užitím hrubé síly

V tabulce již nemá význam dále pokračovat, neboť jsme vyčerpali všechny možnosti. Pokud by se v posledním sloupci tabulky ani jednou neobjevila hodnota 120, potom by řešitel mohl zjemnit krok volbou hodnoty v prvním řádku. Na místo „1“ by napsal „0,1“ a hmotnosti by se měnily v desetinách kilogramů.

[39]Pro potřeby práce je tabulka krácena.

[40]V kapitole věnované strategii SE jsou tabulky formátovány tak, aby odpovídaly tabulkovému procesoru.

[41]Z vlastní praxe je mi známo, že již primáni na malém gymnáziu zvládají podmíněné formátování. Potom je možné nechat zvýraznit výsledek a řešitel ho nemusí hledat.

Výsledek: Je třeba smíchat 20 kg levnějších a 30 kg dražších bonbónů.[42]

Úloha ilustrující důkaz hrubou silou

Zadání: Čísla, která se čtou stejně odpředu i odzadu, jako např. 452 254, se nazývají palindromy. Můj přítel tvrdí, že všechny čtyřciferné palindromy jsou dělitelné číslem 11. Je tomu tak?

Řešení: Nejprve zformulujeme větu, kterou chceme dokázat: „Všechny čtyřciferné palindromy jsou dělitelné číslem jedenáct."

K provedení důkazu užitím hrubé síly využijeme tabulkový procesor. Nejprve vyplníme první dva řádky. Potom vytvoříme automaticky generovaný seznam, kterým provedeme jednotlivé experimenty[43]. V tabulce 1.4 uvádím vzorce tak, jak jsou zapsány v tabulkovém procesoru. První řádek, který reprezentuje vzorce, je v tabulkovém procesoru nahrazen hodnotami.

1	0	=B1	=A1	=1000*A1+100*B1+10*C1+D1	=E1/11
1	1	1	1	1111	101
1	2	2	1	1221	111
...	...	...	...	...	...
2	0	0	2	2002	182
...	...	...	...	...	...
9	1	1	9	9119	829
...	...	...	...	...	...
9	8	8	9	9889	899
9	9	9	9	9999	909

Tabulka 1.4: Důkaz užitím hrubé síly

Vyčerpali jsme všechny možnosti a v posledním sloupci je vždy celé číslo. Tímto jsme větu dokázali výčtem všech možností.

Výsledek: Ano, můj přítel má pravdu.[44]

Úloha ilustrující užití hrubé síly s odůvodněným ukončením experimentování

Zadání: Určete dvě po sobě následující lichá přirozená čísla tak, aby jejich součin byl 1023. (Cihlář a Zelenka, 1998, s. 89)

Řešení: Řešením této úlohy ukazuji použití strategie SE tak, jak jsem ji vymezil. Domnívám se, a praxe to potvrzuje, že způsob řešení se liší od prostředků, které má řešitel k dispozici. Jestliže nemá k dispozici tabulkový procesor a pracuje pouze

[42] Úloha byla publikována v (Eisenmann a Přibyl, 2013).
[43] Pro potřeby práce je tabulka krácena.
[44] Úloha byla publikována v (Eisenmann a Přibyl, 2013).

s tužkou a papírem, potom také obvykle nevolí jako počáteční hodnoty čísla „1“ a „3“, ale nějaká větší, např. „17“ a „19“. V případě užití prostředku počítač[45] nezáleží na tom, od které hodnoty řešitel začíná, a může začít od hodnot „1“ a „3“.

1. liché číslo	2. liché číslo	součin	Pokračujeme?
1	3	3	Ano
3	5	15	Ano
...	...	...	...
17	19	323	Ano
...	...	...	...
29	31	899	Ano
31	33	1023	Ne

Tabulka 1.5: Užití hrubé síly s odůvodněným ukončením experimentování

Tabulka 1.5 se od předchozích liší v tom, že poslední sloupec obsahuje řešitelovy odpovědi, které nejsou součástí „řešitelské“ tabulky.

Výsledek: Hledaná dvě čísla jsou „31“ a „33“.[46]

Úloha ilustrující formulaci hypotézy systematickým experimentováním

Zadání: U prvních 15 prvočísel určete zbytky po dělení šesti. Rozhodněte, zda lze mezi zbytky vysledovat určitou závislost. Pokud ano, pokuste se ji popsat.

Řešení: Řešení je možné provádět buď prostředkem papír a tužka, nebo prostředkem počítač s použitím tabulkového procesoru. Následující tabulka ilustruje druhou možnost. Ani jeden z běžně dostupných tabulkových procesorů nemá vestavěnou funkci pro zjištění, zda dané číslo je či není prvočíslo. Na druhou stranu, řešitel má možnost si buď sám vytvořit makro[47], nebo si z Internetu stáhnout existující tabulku s prvočísly[48]. Tabulka 1.6 je pro úsporu místa rozdělena do tří částí, uspořádaných vedle sebe, přičemž v prvním řádku tabulky v tab. procesoru je vzorec „=MOD(A1;6)“.

Z tabulky je patrné, že prvočísla větší než tři dávají po dělení šesti zbytek buď jedna, nebo pět. To může řešitele opravňovat ke stanovení hypotézy, obzvláště pokud danou úlohu řešil pro více než 15 prvočísel.

Výsledek: Formulujeme následující hypotézu.

Hypotéza: Každé prvočíslo větší než tři lze zapsat buď ve tvaru $6k+1$, nebo ve tvaru $6k+5$, kde k je číslo přirozené.

[45] Viz kapitola 1.3.3 (s. 37).

[46] Úloha byla publikována v (Eisenmann a Přibyl, 2013).

[47] Žáci v tercii na malém gymnáziu toto zvládali.

[48] Pracovní sešity s tabulkou prvočísel jsem na Internetu našel již vytvořené pro běžné tabulkové procesory.

2	2	13	1	31	1
3	3	17	5	37	1
5	5	19	1	41	5
7	1	23	5	43	1
11	5	29	5	47	5

Tabulka 1.6: Úloha ilustrující formulaci hypotézy

1.4.3 Užití falešného předpokladu (UFP)

Stejně jako POK a SE řadím strategii UFP mezi experimentální strategie. Na rozdíl od nich však strategie UFP je specifickou strategií a jak následně ukazuji, lze ji použít pouze v určitých úlohách.

Strategie POK a SE jsou v určité podobě zpracovány v odborné literatuře. Se strategií UFP v podobě, v jaké ji zde uvádím, se obvykle nesetkáme. Je to z toho důvodu, že mezi heuristické strategie jsme ji zařadili až v rámci řešení projektu. Jednu úlohu řešenou touto strategií (tzv. úlohu o rybě) uvádí J. Kopka (1999, s. 8–9; 2013, s. 11–12), avšak v textu mu slouží pouze jako motivační činitel poukazující na skutečnost, že matematické úlohy řešili lidé odedávna. Tento způsob řešení nazývá *metodou nesprávného předpokladu*.

Je zřejmé, že experimentování prováděli matematici po celou dobu, kdy se zabývali řešením úloh, avšak idea strategie UFP je natolik specifická, že je možné její použití dobře sledovat i v historii.

Historické pozadí strategie

Základní myšlenka strategie UFP je poměrně stará. Její kořeny sahají velmi hluboko a lze je najít nejen na *Rhindově papyru* (úloha č. 26) (Chabert, 1999, s. 88), ale dokonce i na tabulkách s klínovým písmem *babylonských matematiků* (s. 86).[49] [50]

Myšlenka strategie UFP jako taková se objevuje i později a můžeme ji nalézt i v pracích G. Cardana (Smith, 1959, s. 201), B. Pitiscuse (Smith, 1959, s. 437) a Fibonacciho (Boman, 2009), kteří ji nazývají *false position* nebo *rule of false* (*Regula Falsa*).

V současnosti máme s pojmy *false position method* či *regula falsa method* spojeny zcela určité představy, jejichž obsahem je numerické řešení rovnic, kdy se s úspěchem snažíme využít přímek. Podíváme-li se však pozorněji na tuto strategii řešení, zjistíme, že má dvě varianty. První je *simple false position* a druhou je *double false position* (Chabert, 1999, s. 84), přičemž první odpovídá našemu pojetí a druhá pojetí známému z numerické matematiky.

V dnešní době se s UFP setkáváme ve školské matematice pouze ve dvou směrech. První směr akcentuje motivační aspekt historického pozadí studované problematiky.

[49] Pro podrobnější seznámení s historií doporučuji třetí kapitolu této knihy (Chabert, 1999).

[50] Podrobně je historie popsána v (Eisenmann, Novotná a Přibyl), který prochází recenzním řízením v časopise JMD.

Vhodnou ukázkou tohoto směru je práce (Ofir a Arcavi, 1992), kde se snaží pomocí historických pramenů motivovat žáky k přemýšlení o matematice a možnostech, které dnes přináší. Na základě svých zkušeností však autoři doporučují probíranou *Egyptian Method* spíše nadanějším žákům (s. 84). Druhý směr se zabývá zařazením této metody do výuky matematiky jakožto nástroje, který klade důraz na fylogenetický přístup k výuce jednotlivých matematických pojmů. G. Winická (2000) přitom poukazuje na skutečnost, že aby učitelé mohli vhodně zařazovat historické prvky do výuky, musí být k tomu sami vedeni. S učiteli základních škol autorka provedla experiment, kde jedním z cílů bylo naučit je používat metodu UFP při řešení úloh. Otázky, které vyvstaly při výuce učitelů, pak posloužily ke zkvalitnění metodického zpracování této partie pro žáky.

Ke strategii UFP osobně přistupuji jako ke svébytné heuristické strategii řešení úloh (byť s bohatým historickým kontextem) a způsob jejího zařazení do výuky členové řešitelského týmu podřídili mnou uváděnému zpracovanému systému strategií.

Vymezení strategie

Strategie UFP je založena na provedení experimentu stejně jako strategie POK a SE, avšak liší se od nich v několika detailech.

- Na rozdíl od strategií POK a SE je UFP vždy jednokroková, tzn. korekce prováděná ve 3. fázi již vede ke správnému výsledku.
- Na rozdíl od strategie POK provádíme volbu první hodnoty s vědomím, že se cíleně jedná o nesprávnou hodnotu, zatímco u strategie POK se snažíme zvolit hodnotu správnou.
- Tato strategie není univerzální a hodí se pouze pro určitý typ úloh, jak je uvedeno dále.

Možnost použití této strategie se odvíjí od podstaty úlohy (popisuje vztah lineární závislosti) a je na ni přímo vázána. Pro úspěšné zvládnutí strategie UFP je zapotřebí, aby řešitel ovládal trojčlenku nebo přímou úměrnost a práci se zlomky. Strategie UFP umožňuje řešit dvě základní skupiny úloh v závislosti na typu lineární závislosti.

1. Vztah mezi zvolenou a zadanou hodnotou je $y = kx$. Potom se ptáme, **kolikrát** se musí hodnota změnit. Tento typ je ilustrován první a druhou úlohou.
2. Vztah mezi zvolenou a zadanou hodnotou je $y = x + a$. Potom se ptáme, **o kolik** se musí hodnota změnit. Tento typ je ilustrován třetí úlohou.

Strategie UFP je založena na provedení jednoho experimentu, jeho následném vyhodnocení a opravení zvolené hodnoty. Jedná se o jednokrokovou strategii, kdy daný krok se skládá nejvýše ze tří fází.

- Ve fázi *pokus* řešitel provede experiment, tj. zvolí hodnotu, o které předpokládá, že je nesprávná. Volba hodnoty je zcela závislá na jeho vůli a může být ovlivněna předchozí zkušeností. Se zvolenou hodnotou provede veškeré požadované početní úkony.

- Ve fázi *ověření* řešitel zjistí, do jaké míry je jím zvolená hodnota nesprávná. Po provedení všech výpočtů porovná svůj výsledek s hodnotou v úloze a stanoví, kolikrát (nebo o kolik) se má jím volená hodnota změnit. Po té řešitel přistoupí ke třetí fázi.

- Ve fázi *korekce* řešitel provede úpravu zvolené hodnoty užitím přímé úměrnosti nebo trojčlenky, nebo přičtením vhodného čísla, čímž najde správný výsledek.

Úlohy ilustrující strategii

V patnáctém století francouzský šlechtic z Nice – Frances Pellos předložil následující úlohu:

Zadání první úlohy: Polovina a třetina kopí je ponořená pod vodou. Část nad vodou má devět dlaní[51]. Řekněte, jak dlouhé je kopí.[52] (Chabert, 1999, s. 83)

Řešení: Řešení popíšeme v jednotlivých fázích strategie UFP.

- Ve fázi pokusu předpokládáme, že kopí měří 12 dlaní. Určíme, jak velká část kopí je podle zadání úlohy nad vodou. Volba velikosti 12 dlaní vyplývá z dělitelnosti čísla dvěma a zároveň třemi. Je třeba poznamenat, že na řešení úlohy to nemá vliv. Jako vstupní hodnotu můžeme zvolit také čísla 10, 100, 1000,...

- Ve fázi ověření zjistíme, že pro délku 12 dlaní je pod vodou polovina (tj. 6 dlaní) a třetina (tj. 4 dlaně), tedy celkem 10 dlaní a nad vodou zůstávají dvě dlaně. Kolik jich však zůstává ve skutečnosti? Devět. Je zřejmé, že náš odhad byl nesprávný.

- Ve fázi korekce určíme, jak je třeba upravit odhad, abychom získali po provedení všech požadovaných operací číslo 9. Náš odhad musíme zvětšit $\frac{9}{2}$ krát, tedy na hodnotu
$$12 \cdot \frac{9}{2} = 54.$$

Výsledek: Délka celého kopí je 54 dlaní.[53]

Zadání druhé úlohy: Jan si chtěl k narozeninám koupit letadlo na dálkové ovládání. V polovině ledna byla jeho cena o 25 % nižší než před Vánoci. Když si letadlo koncem ledna koupil, dostal ještě slevu 10 % z nové ceny a zaplatil 11 070 Kč. Kolik Jan ušetřil?

Řešení: Předpokládejme, že letadlo původně stálo 1 000 Kč. Po první slevě pak byla cena letadla 750 Kč. Po druhé slevě byla cena letadla 675 Kč. Jenže Jan zaplatil 11 070 Kč. Kolikrát je třeba zvětšit vstupní hodnotu? Ze zadané a vypočtené hodnoty

[51] 1 stopa = 4 dlaně = 12 palců

[52] A lance has a half and a third in the water and 9 palms outside. I ask you how long is it?

[53] *Didaktická poznámka:* Tuto úlohu je možné mezipředmětově provázat. Vhodným zadáním je možné nechat žáky, ať už v hodině nebo za domácí úkol zjistit, jak je kopí dlouhé v centimetrech a zda to odpovídá realitě. Jedná se o propojení předmětů: dějepis (znalosti reálií, historické míry), anglického jazyka (překlad jednotek z AJ do ČJ a vice versa), informatiky (vyhledávání a potvrzování validity získaných informací) a fyziky (převody jednotek).

zjistíme, že vstupní hodnotu je třeba zvětšit $\frac{11070}{675}$ krát. Pomocí tohoto koeficientu vypočteme původní cenu.

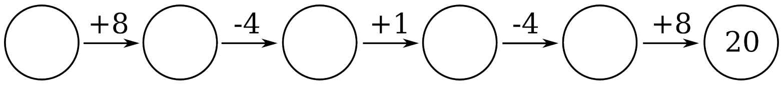
$$1000 \cdot \frac{11070}{675} = 16400$$

Původní cena letadla byla 16 400 Kč.

$$16400 - 11070 = 5330$$

Výsledek: Jan ušetřil 5 330 Kč.

Zadání třetí úlohy: Do prázdných polí na obrázku 1.11 vepiš čísla tak, aby provedené operace byly správné. Jaké číslo je v hadovi první?



Obrázek 1.11: Matematický had pro 1. stupeň ZŠ

Řešení: Předpokládejme, že na počátku napíšu číslo 10. Po provedení vyznačených aritmetických operací získám číslo 19. Jenže číslo, které jsme měli získat je 20. O kolik je potřeba zvětšit původní hodnotu? Ze zadané a vypočtené hodnoty zjistíme, že vstupní hodnotu je třeba zvětšit o 1.

Výsledek: Prvním číslem v hadovi je číslo 11.

Poznámka: Pokud úloha měla diagnostický cíl – ověření znalosti použití inverzních operací – tak v tomto případě „selhala“. Je to skutečnost, na kterou jsem upozornil při vymezení pojmu úloha. Zadání úlohy toto nepožadovalo, což neznamená že tato informace nebyla součástí didaktického kontraktu, a z hlediska řešení žák vyřešil úlohu správně.

Úskalí strategie

Popsaná strategie UFP přináší určitá úskalí. Prvním úskalím je vhodná volba nesprávného (falešného) předpokladu. Nejlepší volbou jsou takové hodnoty, které po provedených krocích vedou na celočíselný násobek mezi zadaným a vypočítaným číslem. Praxe ukazuje, že tomuto se lze do určité míry naučit.

Druhým úskalím je správná identifikace úlohy, která nereprezentuje vztah přímé úměrnosti. V řadě případů se jedná o úlohu, kde jsou objekty ve vztahu nepřímé úměrnosti. V tomto případě je třeba vysvětlit, jak lze popsanou metodu upravit (použít převrácený koeficient). V jiných případech se jedná o to, že proměnné v úloze nejsou lineárně závislé (ale jsou závislé např. kvadraticky).

Přínos strategie

Provedený experiment ukázal (viz kapitola 4, s. 104), že zavedení heuristické strategie UFP před rovnicovým aparátem je jeho vhodnou propedeutikou[54]. Jednou z největších

[54] Viz (Eisenmann, Novotná a Přibyl), který je posuzován v časopise JMD.

obtíží v tomto případě bývá sestavení příslušné rovnice. Jakmile je rovnice sestavena, potom obvykle nebývá problém s řešením úlohy. Klíčovým faktem při seznamování žáků s metodou řešení strategií UFP je skutečnost, že na volbě odhadu (falešného předpokladu) nezáleží. Uvědomění si tohoto faktu navozuje lepší pochopení pojmu neznámá, kterou do řešení úlohy zavedeme, abychom mohli úlohu vyřešit pomocí rovnice.

1.4.4 Srovnání experimentálních strategií POK, SE a UFP

Tři uvedené strategie POK, SE a UFP patří do skupiny experimentálních strategií, proto je účelné provést jejich srovnání. První srovnání je patrné z jejich vlastností, které jsou popsány v kapitole vlastnosti heuristických strategií (viz 1.3.4, s. 39).

- Univerzálnost použití strategií stoupá v pořadí: UFP – SE – POK.
- Míra potřebných znalostí stoupá v pořadí: POK – SE – UFP.
- Míra potřebných dovedností (např. užití ICT) stoupá v pořadí: POK – UFP – SE.

Na tomto místě je třeba zmínit, že užití PC (např. tabulkového procesoru) u strategie SE klade na řešitele poměrně velké nároky na sestavení vhodného vzorce. Zmiňovaný výzkum ukázal, že se tomu lze naučit, pokud je práce s PC zapojována do výuky matematiky standardně (jako v případě třídy, kterou vedl učitel Milan).

Dále můžeme sledovat vytížení řešitele v průběhu řešení úlohy, zejména intenzitu řešení a délku trvání řešení úlohy:

- POK – vytížení řešitele je stálé, konstantní po celou dobu řešení, délka řešení je proměnlivá;
- SE – na počátku je vytížení řešitele velmi intenzivní – řešitel provádí volbu velikosti kroku a obvykle i tvoří výpočetní vzorec, poté však vytíženost řešitele výrazně klesá, neboť volba hodnoty už je na něm nezávislá; délka řešení je proměnlivá;
- UFP – vytížení řešitele je stálé a oproti POK intenzivní, neboť po celou dobu se na řešení úlohy aktivně podílí; délka řešení je konstantní.

Druhou skupinu tvoří strategie, kdy při řešení úlohy si řešitel vytvoří *pomocnou úlohu*, jejímž vyřešením se mu podaří (ať už přímo či nepřímo) vyřešit původní úlohu. Celou skupinu si dovoluji rozdělit na dvě samostatné části, přestože v pozadí obou je právě tvorba úlohy řešitelem.

O pomocné úloze (*auxiliary problem*) jako takové se zmiňuje již G. Pólya (2004, s. 50–57). Dle jeho pojetí je pomocná úloha samostatnou strategií na stejné úrovni jako analogie nebo pomocný prvek. Sám považuji toto pojetí za poměrně široké a nabízím možnost nahlédnout tuto (Pólyovu) strategii jako skupinu strategií.

1.4.5 Analogie (An)

O analogii se v matematice i ve výuce matematiky hovoří poměrně často. G. Pólya (2004, s. 37) vymezuje analogii jako „určitý druh podobnosti“[55], kdy analogické objekty mají v jistém smyslu stejné vlastnosti. Jako příklad uvádí vztah rovnoběžníku a rovnoběžnostěnu – některé vlastnosti se zachovávají, jiné nikoliv. O analogii se zmiňuje ve smyslu vyřešení jednodušší (analogické) úlohy (*simpler analogous problem*), avšak rozlišuje dva základní případy. V prvním případě hovoří o *metodě jednodušší analogické úlohy* (*method of the simpler analogous problem*), která umožní objevit algoritmus řešení a řešitel může nalezený postup řešení aplikovat na původní úlohu. Druhý případ označuje jako *výsledek jednodušší analogické úlohy* (*result of the simpler analogous problem*), kde získaný výsledek je přímo hledaným výsledkem (s. 42). Autor také upozorňuje na rizika, která přináší nevhodné použití analogie, kdy přeneseme vlastnost, která není ekvivalentním protějškem zkoumané vlastnosti. Z mého pohledu strategie analogie v sobě skrývá dvě rozdílné strategie, jak ukážu dále.

Oproti G. Pólyovi užívá T. Tao (2006) pojem analogie v jiném smyslu, neboť hovoří o algebraické analogii ke geometrické úloze (s. 61). Toto vymezení koresponduje s tím, jak vymezuji strategii Přeformulování úlohy (viz kapitola 1.4.6, s. 60).

Z výše uvedeného je zřejmé, že různí autoři vnímají analogii rozdílně. Někteří ji pojímají jako heuristické strategii, jiní se zmiňují pouze o analogii jako takové. Vymezení, které plně koresponduje s mým, uvádějí A. Posamentier a S. Krulik (1998, s. 98) a nazývají ji *strategie řešením jednodušší analogické úlohy* (*solving a simpler analogous problem strategy*). Použití této strategie ukazují nejen na matematických úlohách, ale i na problémech z reálného života.

P. Zeitz (2007) nezavádí analogii jako takovou, ale v jeho práci se daná idea velmi často objevuje, například ve „strategiích“ *zbožné přání* (*wishful thinking*) a *udělej to jednodušší* (*make it easier*). Základní myšlenkou je nahrazení obtížně uchopitelných objektů, např. nehezká čísla (*ugly numbers*), objekty jednoduššími. Tyto dvě strategie jsou prvotní odpovědí na otázku „*Co dělá danou úlohu obtížnou?*“[56] (s. 27).

Zcela specifický přístup k analogii zaujímá T. Ben-Zeev (1996), která hovoří o analogické podstatě matematického myšlení (*The analogical nature of mathematical thinking*) a považuje ji za speciální případ induktivního myšlení.

J. Vyšín (1978) vnímá analogii jako složku matematické tvořivosti, avšak podstata je stále stejná. Cílem je objevit postup, který řešitel přenese z jedné úlohy (autor hovoří o modelu) do úlohy druhé.

Analogie jako samostatný prvek ve výuce matematiky se objevuje velmi často. Tuto úvodní pasáž si dovolím uzavřít slovy autora, který ji otevřel. G. Pólya ve své pozdější práci[57] (1954) se k analogii znovu vrací a zabývá se jí více do hloubky. Pohlíží na ni nejen jako na heuristickou strategii, ale i jako na nástroj, který umožňuje

[55] Analogy is a sort of similarity.

[56] What is it about the problem that makes it hard?

[57] Na tomto místě si dovolím poukázat na jeden zajímavý fakt, který se prolíná předkládanou prací. První vydání knihy *How to Solve It?* vyšlo v roce 1945. Proto všechny časové odkazy vztahuji k tomuto datu, neboť posun G. Pólyi v pojímání strategií se vyvíjí v čase. Jelikož jsem však měl k dispozici vydání z roku 2004, v celé práci se odkazuji k tomuto vročení.

objevovat nové zákonitosti v matematice, a budovat tak poznatky. V práci (1981) pak řešení celé řady úloh opírá o analogii a uvádí řadu historických poznámek o tom, jak význační matematici ve své práci analogii používali.

Vymezení strategie

Strategie patří do skupiny strategií, kdy v rámci řešení je vytvořena nová – analogická – úloha, která má pomoci řešiteli vyřešit původní úlohu. Mé pojetí analogie se více či méně shoduje s vymezením, které podávají A. Posamentier a S. Krulik (1998). Analogickou úlohu si tvoří sám řešitel za účelem nalezení řešení (tj. postupu), které potom aplikuje na původní úlohu. Překážkou v řešení původní úlohy totiž mohou být objekty (čísla, geometrické útvary, ...), které jsou v daném tvaru (subjektivně) obtížně uchopitelné pro řešitele. Z toho důvodu si tyto objekty nahradí „přátelštějšími“[58], které mu umožní nahlédnout řešení.[59]

Úlohy ilustrující strategii

Zadání první úlohy: Rozhodněte, který zlomek je větší: $\frac{125}{126}$, nebo $\frac{124}{125}$?[60]

Řešení: Je zřejmé, že tato úloha je snadno řešitelná pomocí kalkulačky. Stejně tak převodem na společného jmenovatele dokážeme rozhodnout, který ze zlomků je větší. Domnívám se, že užití strategie analogie je v tuto chvíli více než užitečné, neboť umožní získat žákovi větší vhled do problematiky zlomků. Uvědomme si, že nahrazení původních zlomků jednoduššími může být založeno jak na vhledu do úlohy, tak i na zkušenosti s danou strategií. Z hlediska řešení je důležité mít na mysli, kterou vlastnost přenášíme.

Zadání analogické úlohy: Rozhodněte, který zlomek je větší: $\frac{3}{4}$, nebo $\frac{2}{3}$?

Řešení analogické úlohy: V tuto chvíli by již nemělo být pro řešitele obtížné rozhodnout, který zlomek (v analogické úloze) je větší.

Výsledek analogické úlohy: Zlomek $\frac{3}{4}$ je větší než zlomek $\frac{2}{3}$.

Analogickou úlohu jsme formulovali s přesvědčením, že vlastnost uspořádání je stejná pro všechny zlomky, které jsou ve tvaru $\frac{n+1}{n+2}$ a $\frac{n}{n+1}$.

Výsledek: Zlomek $\frac{125}{126}$ je větší než zlomek $\frac{124}{125}$.

V následující ilustrativní úloze přátelštějšími objekty nejsou čísla, ale geometrické útvary.

Zadání druhé úlohy: Je dán pravidelný osmistěn a přímka p, která leží vně osmistěnu. Určete rovinu, která prochází přímkou p a rozdělí daný osmistěn na dvě části se stejným objemem.[61]

[58] Slovo *přátelštější* vystihuje podstatu volby analogických objektů. Přestože se nejedná o standardní pojem v didaktice matematiky, a mohl by být nahrazen pojmy *jednodušší*, *snadněji uchopitelný* apod., tak budu i nadále používat tento pojem, byť i jen z toho důvodu, že členové výzkumného týmu jej v tomto duchu používali po celou dobu řešení projektu. Původní idea pojmu se opírá o anglické *user-friendly* a vytvářené objekty měly být pro řešitele právě „user-friendly“.

[59] Více viz (Eisenmann, Přibyl, in print), nebo (Novotná, Eisenmann, Přibyl, 2015a).

[60] Úloha byla publikována jak v (Eisenmann, Přibyl, in print) tak v (Novotná, Eisenmann, Přibyl, 2015a).

[61] Úloha byla publikována v (Eisenmann, Přibyl, in print).

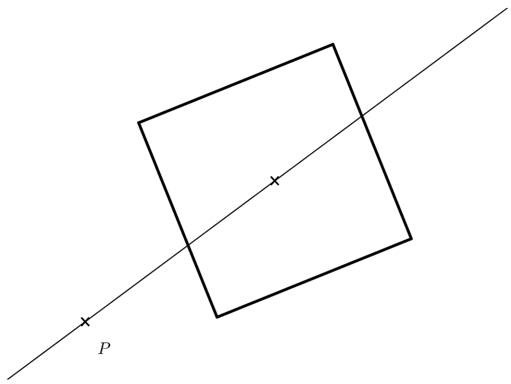
Řešení: Praxe ukázala, že pro řešitele je poměrně obtížné si nakreslit ilustrativní obrázek. Obtíží v úloze je ona přímka p, která znesnadňuje řešení. O strategii vypuštění podmínky, která by v tuto chvíli také byla vhodnou řešitelskou heuristickou strategií, píši dále (viz 1.4.13, s. 78).

Z hlediska použití strategie An je v tuto chvíli důležité si uvědomit, kterou vlastnost chceme přenést. Při formulaci analogické úlohy vycházíme z předpokladu, že vztah incidence se nezmění při přechodu do prostoru o dimenzi menší.

Zadání analogické úlohy: Je dán čtverec a bod P, který leží vně čtverce. Určete přímku, která prochází bodem P a rozdělí daný čtverec na dva útvary se stejným obsahem.

Každý objekt z původního zadání je v analogické úloze nahrazen objektem o dimenzi nižší. Zůstaly však zachovány vztahy.

Řešení analogické úlohy: V tuto chvíli je možné (a vhodné) sestrojit si ilustrativní obrázek, který zachycuje jedno z možných zadání a výsledků dané úlohy (viz obr. 1.12). Sestrojením tohoto obrázku jsme provedli tzv. konkrétní volbu o které je řeč v popisu strategie konkretizace a zobecnění (viz 1.4.8, s. 64).



Obrázek 1.12: Analogická úloha – Čtverec a přímka

Výsledek analogické úlohy: Hledaná přímka prochází daným bodem P a středem čtverce.

Nyní využijeme našeho předpokladu, že vztah incidence, a tím pádem i řešení úlohy, se nezmění se změnou dimenze.

Výsledek: Hledaná rovina prochází středem pravidelného osmistěnu a danou přímkou p.

Úskalí strategie

Největším úskalím této strategie je vhodná volba přátelštějších objektů tak, aby byla zachována stěžejní vlastnost, kterou přenášíme do analogické úlohy. Provedený dlouhodobý experiment ukázal (viz kapitola 3, s. 88), že žáci jsou schopni se do určité míry naučit s úspěchem používat strategii An, pokud se jedná o aritmetické úlohy. Vhodnou volbou přátelštějších čísel většinou snáze objeví hledaný postup, který potom aplikují na původní úlohu. U číselných objektů obvykle není zapotřebí větší míry vhledu do úlohy, neboť řadu vlastností čísel si žáci budují po celý život a na určité, byť nevědomé úrovni, tyto vlastnosti s úspěchem používají.

Druhá ilustrativní úloha nám ukazuje, že v řadě případů je také možné použít tuto heuristickou strategii, avšak od řešitele se předpokládá již určitá (nenulová) míra zkušeností nebo vhled do konkrétní úlohy.

Přínos strategie

Výrazným přínosem strategie An je fakt, že častým užíváním může u žáků zlepšovat vhled do jednotlivých úloh. V případě aritmetických úloh bývá poměrně snadno zvládnutelná. Tato strategie a obecně spíše idea stojí v pozadí pojmů jako jsou izomorfismus, homomorfismus a jim podobné. Zvládnutí a pochopení ideje analogie umožňuje řešiteli nejen postupovat v matematice hlouběji, ale i snáze se vyrovnávat s novými úlohami či problémy.

1.4.6 Přeformulování úlohy (PU)

Tato strategie spolu s předchozí spadá do druhé skupiny strategií, ve kterých řešitel vytváří vlastní – pomocnou – úlohu. Na rozdíl od strategie An, ji vytváří s jiným záměrem. Cílem není najít algoritmus řešení, který potom řešitel zopakuje na původní úloze, ale úlohu vyřešit jiným způsobem.

G. Pólya nevymezuje strategii PU jako samostatnou, ale řadí ji pod strategii jednodušší analogické úlohy, která je zaměřena na výsledek procesu řešení. Přesto se s „přeformulováním" můžeme v práci (2004) setkat. Autor často užívá větu „Můžeš přeformulovat úlohu?"[62] jako nástroj pro zjištění, zda řešitel porozuměl zadání úlohy a otázka zde vystupuje ve smyslu „Můžeš říci svými slovy, co říká úloha?" G. Pólya (2004) také hovoří o pozměňování úlohy (*variation of the problem*) ve smyslu obecnější ideje. Právě výše zmíněná strategie An nebo strategie Zavedení pomocného prvku (viz kapitola 1.4.12, s. 74), ale i další, vycházejí právě z myšlenky pozměnění úlohy. *„Jestliže nemůžeš vyřešit danou úlohu, pokus se nejdříve vyřešit úlohu jí podobnou."*[63] (s. 10)

Relativně blízko k mnou uváděnému pojetí strategie PU má P. Zeitz (2007), který uvádí, že *„důležitou skutečností pro ‚kreativního' řešitele úloh s otevřenou myslí je povědomí o tom, že řada úloh může, a měla by, být vyslovena různými způsoby."*[64] (s. 53) Přeformulování nazývá *recast* a jeho podstatou je převedení úlohy z jedné matematické oblasti do jiné, např. z kombinatoriky do teorie čísel. Tento proces nazývá *metamorfózou úlohy*. Nejznámější a zřejmě i nejvýznačnější přeformulování je připisováno R. Descartesovi, který geometrický svět (ve smyslu užívání P. Vopěnkou) nahradil světem aritmetiky a algebry.

S obdobným přístupem k mému vymezení strategie PU se můžeme setkat i v (Larson, 1983, 1990), který hovoří o strategii formulování ekvivalentních problémů[65] (*for-*

[62] Could you restate the problem?

[63] If you cannot solve the proposed problem try to solve first some related problem.

[64] Central to the open-minded attitude of a „creative" problem solver is an awareness that problems can and should be reformulated in different ways.

[65] Terminologie převzata z (Larson, 1990) a přeložena do českého jazyka.

mulate an equivalent problem). Ekvivalentní úlohu pak představuje ve dvou polohách. První je úloha obdobná originálu, kdy je zachován jak kontext tak jazyk úlohy a metamorfóza proběhla pouze určitou operací, která přináleží danému kontextu a jazyku. Druhou polohu již vnímám jako přeformulování ve smyslu odpovídajícímu našemu pojetí, kdy L. C. Larson mění nejen kontext, ale i jazyk úlohy.

Jak je ukázáno v (Davidson, 2003), z pohledu psychologie je přeformulování úzce provázáno s vhledem do úlohy. K tomu, abychom úlohu vyslovili v jiném kontextu a v jiném jazyce, je nezbytně nutné, abychom zcela porozuměli zadání úlohy a uvědomili si všechny vztahy, které mezi jednotlivými proměnnými úlohy jsou. J. E. Davidsonová (2003) uvádí, že být schopen přeformulovat úlohu znamená být schopen nahlédnout úlohu zcela novým úhlem pohledu. Domnívám se, že aby řešitel byl schopen provádět přeformulování problému, musí mít znalosti z více partií matematiky a dostatečné množství zkušeností.

Vymezení strategie

Strategie PU patří do skupiny strategií, kdy v rámci řešení je vytvořena nová – přeformulovaná – úloha, která má pomoci řešiteli vyřešit původní úlohu. Základní charakteristikou této strategie je fakt, že výsledek (obvykle jeho číselná část) přeformulované úlohy je také výsledkem úlohy původní.[66]

Přeformulování úlohy může být prováděno několika způsoby:

- změnou objektů v rámci jednoho kontextu;
- změnou kontextu jako takového;
- změnou matematického prostředí/reprezentace (převedením do jiného jazyka matematiky);

Uspořádání výše uvedených možností naznačuje zvyšující se nároky, které jsou kladeny na řešitele.

Úlohy ilustrující strategii

Nejprve ilustruji přeformulování, které pouze mění objekty v rámci jednoho kontextu.
Zadání první úlohy: Najděte všechna řešení rovnice

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$[67]

Řešení: Nalezení všech řešení rovnice vyžaduje určitou zkušenost (opírající se o znalost). Dále je potřeba si stanovit číselný obor (obecně algebraickou strukturu) ve které rovnici řešíme. Obvykle toto stanovení bývá součástí didaktického kontraktu mezi zadavatelem úlohy a řešitelem. Řešme tuto rovnici v reálných číslech. Rovnici je možné přeformulovat na ekvivalentní rovnici tím, že ji celou vydělíme x^2 (za předpokladu, že x^2 je různé od 0).

[66] Více viz (Eisenmann, Kopka, Ondrušová, Přibyl, 2012).
[67] Zadání úlohy převzato z (Larson, 1990, s. 29–30).

Zadání přeformulované úlohy: Najděte všechna řešení rovnice

$$x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

Řešení přeformulované úlohy: Vhodným přeuspořádáním nové rovnice získáme následující rovnici.

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$$

Zavedením nového prvku do úlohy (viz 1.4.12) – proměnné z substitucí: $z = x + \frac{1}{x}$ získáme novou rovnici.

$$z^2 + z - 1 = 0$$

Tato rovnice má dvě řešení: $z_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ a $z_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Dosazením z_1 a z_2 do substituce $z = x + \frac{1}{x}$ získáme rovnice $2x^2 + (1-\sqrt{5})x + 2 = 0$ a $2x^2 + (1+\sqrt{5})x + 2 = 0$, z nichž ani jedna nemá řešení v oboru reálných čísel.

Poznámka: V oboru komplexních čísel mají tyto rovnice následující řešení:

$$x_1 = \frac{1}{4}\left(-1 + \sqrt{5} - \mathrm{i}\sqrt{2\left(5 + \sqrt{5}\right)}\right) \qquad x_2 = \frac{1}{4}\left(-1 + \sqrt{5} + \mathrm{i}\sqrt{2\left(5 + \sqrt{5}\right)}\right)$$

$$x_3 = \frac{1}{4}\left(-1 - \sqrt{5} - \mathrm{i}\sqrt{2\left(5 - \sqrt{5}\right)}\right) \qquad x_4 = \frac{1}{4}\left(-1 - \sqrt{5} + \mathrm{i}\sqrt{2\left(5 - \sqrt{5}\right)}\right)$$

Výsledek přeformulované úlohy: V oboru reálných čísel nemá rovnice

$$x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

řešení.

Výsledek: Výsledek přeformulované úlohy je stejný jako výsledek úlohy původní. V oboru reálných čísel nemá rovnice

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

řešení.

Je třeba si uvědomit, že v rámci řešení přeformulované úlohy jsme substitucí zavedli novou neznámou. O tomto způsobu řešení píši dál v části Zavedení pomocného prvku (viz kapitola 1.4.12, s.74). Tato substituce vytvořila novou úlohu – řešíme kvadratickou rovnici, která hraje roli pomocné úlohy ve smyslu, jak ji chápe G. Pólya (2004). Z mého pohledu se nejedná ani o úlohu analogickou a ani o úlohu přeformulovanou. Protože pomocné úlohy netvoří v mém pojetí ideově uzavřený systém, ve své práci a ani v našem výzkumu jsme se jim nevěnovali. Pokusím-li se je charakterizovat, potom se domnívám, že tyto úlohy mají roli lemmatu, které je potřeba dokázat v rámci provádění důkazu.

Následující úloha ilustruje přeformulování, které mění kontext úlohy, avšak nemění její „jazyk“.

Zadání druhé úlohy Rozhodněte, který zlomek je větší: $\frac{125}{126}$, nebo $\frac{124}{125}$?[68]

Řešení: Z řešení strategií An víme, že danou úlohu je možné řešit více způsoby. Podívejme se nyní na úlohu tak, že zlomek $\frac{125}{126}$ vznikne odebráním $\frac{1}{126}$ z jedné celé. Jak velká část chybí do celku?

Zadání přeformulované úlohy: Kdy odebírám více? Když z jedné celé odeberu $\frac{1}{126}$ nebo $\frac{1}{125}$?

Řešení přeformulované úlohy: Je zřejmé, že z celku odeberu více, když odejmu $\frac{1}{125}$. (Pokud to zřejmé není, užijte strategii An.)

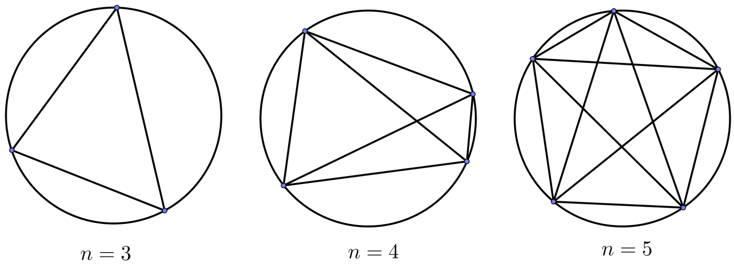
Výsledek přeformulované úlohy: Protože zlomek $\frac{1}{126}$ je menší než zlomek $\frac{1}{125}$, tak odebráním $\frac{1}{126}$ z celku mi zůstane větší číslo.

Výsledek: Zlomek $\frac{125}{126}$ je větší než zlomek $\frac{124}{125}$.

Následující úloha ilustruje přeformulování do jiného „jazyka“.

Zadání třetí úlohy: Na kružnici je vyznačených n bodů a každé dva jsou spojené tětivou. Předpokládejme, že žádné tři tětivy se uvnitř kruhu neprotínají v jednom bodě. Kolik průsečíků uvnitř kruhu existuje?

Řešení: Obr. 1.13 ilustruje zadání úlohy volbou konkrétních hodnot n.



Obrázek 1.13: Ilustrace několika případů zadání úlohy „tětivy v kruhu“

Z obrázku 1.13 je patrno, že každé čtyři různé body na kružnici jednoznačně určí jeden průsečík tětiv.

Zadání přeformulované úlohy: Kolik čtyřprvkových podmnožin má n prvková množina?

Řešení přeformulované úlohy: Z kombinatoriky nebo z algebry množin víme, že těchto podmnožin je $\binom{n}{4}$.

Výsledek přeformulované úlohy: Každá n prvková množina má $\binom{n}{4}$ podmnožin.

Výsledek: V kruhu existuje $\binom{n}{4}$ průsečíků.

V rámci řešení úlohy jsme nejprve zvolili konkrétní hodnoty. O strategii, která je na tomto přístupu založená se zmiňuji v kapitole 1.4.8 a nazývá se Konkretizace a zobecnění. Zde provedená konkretizace nám umožnila získat hlubší vhled do úlohy a uvědomit si její pozadí. Každá jednotlivá konkretizace byla prováděna grafickou cestou – ilustrativním obrázkem. Na základě získaného vhledu jsme mohli provést uvedené přeformulování.

[68]Zadání úlohy viz strategie An 1.4.5, s. 58.

Úskalí strategie

Jedná se o strategii, která není univerzální v tom smyslu, v jakém univerzalitu chápu u strategie POK. Úspěšné použití této strategie je výrazně závislé na řešiteli (viz vlastností strategií 1.3.4, s.39) a je zřejmé, že řešitel musí mít jak vhled do úlohy, tak i znalosti z různých partií matematiky, popř. dalších disciplín. Úskalí, která se pojí s touto strategií vyplývají z nesprávně přeformulované úlohy.

Námi provedený experiment ukázal, že tato strategie patří mezi ty, které je nesnadné se naučit.

Přínos strategie

Domnívám se, opírajíce se o literaturu, že aktivní užívání strategie PU je úzce spjato se schopností dívat se na věci z různých úhlů pohledu, s vhledem do většího množství úloh a se znalostí různých partií matematiky. Strategie PU ovlivňuje a naopak sama je ovlivňována těmito aspekty řešitele.

1.4.7 Srovnání strategií An a PU

Druhá skupina se skládá ze dvou výše uvedených strategií. Obě vytvářejí novou úlohu, ale zatímco úloha u strategie An slouží k nalezení postupu, který potom řešitel aplikuje na data původní úlohy, tak pomocí strategie PU řeší řešitel původní úlohu, avšak obvykle v jiném kontextu nebo „jazyce“ a již není třeba se k datům původní úlohy vracet.

1.4.8 Konkretizace a zobecnění (KaZ)

Strategie KaZ je námi vyvozená strategie, která má svůj základ v heuristice nazvané specializace (*specialization*), jak ji uvádí G. Pólya v (2004). Podstatou jím specifikované strategie je idea, že vhodnou volbou konkrétního objektu z množiny objektů vyskytujících se v úloze řešitel buď získá vhled do úlohy a vyřeší ji, nebo ukáže, že úloha je neřešitelná, nebo úlohu vyřeší pro konkrétní zadání a ukáže, že toto řešení je řešením celé úlohy. K tomu užívá několik typů specializace. Prvním je *zvláštní – specifický případ* (*special case*), kdy v úloze o obecném trojúhelníku zvolí např. rovnostranný trojúhelník. Druhým typem je *extrémní – limitní případ* (*extreme case*), kdy zvolí krajní případ, např. když konvexní čtyřúhelník degeneruje na trojúhelník, tzn. tři vrcholy čtyřúhelníku se stanou kolineárními. Třetím případem je *protipříklad* (*counter-example*), kdy vhodnou volbou konkrétního objektu ukáže, že existuje alespoň jedna situace, kdy podmínky úlohy nejsou splněny. V (1981) pak přidává ještě jeden typ a uvádí, že specializace vytváří pomocnou úlohu (*auxiliary problem*)[69]. Zobecnění (*generalization*) je pro G. Pólyu samostatnou heuristikou, kdy ze zadání úlohy vytvoří úlohou novou – obecnější, obvykle na základě experimentování s vstupními objekty[70].

[69]Více viz kapitola 1.4.12, s. 74
[70]Více viz kapitola 1.4.9, s. 67

Některé z výše uvedených typů jsou zmiňovány i dalšími autory. Například L. C. Larson (1983) se zmiňuje o extrémních případech (*consider extreme cases*). J. Mason (1992, s. 21) uvádí, že konkretizace (*specialization*) je přirozeným procesem, jak se vypořádat s určitým typem úloh. V některých příkladech, které uvádí, se dle mého vymezení strategií jedná o strategii An, neboť určitý objekt nahradí jednodušším a nedochází tak k nahrazení určité množiny objektů jedním.

Vymezení strategie

Pro potřeby práce vymezuji strategii KaZ jako dvousměrný proces kdy ze zadané úlohy, získáme novou úlohu – konkretizovanou, a po jejím vyřešení se vracíme zpět k úloze původní – obecnější, přičemž podstatou je, že strategie nezobecňuje úlohu, ale získaný výsledek. Cílem řešení konkrétní úlohy je buď získat vhled do problematiky, nebo přímo vyřešit danou úlohu. Tato strategie je s úspěchem použitelná u úloh, které označuji jako úlohy zadané neurčitě nebo úlohy parametrické (viz kapitola 1.1.2, s. 24).

Úlohy ilustrující strategii

První úloha ilustruje použití strategie KaZ na úloze zadané neurčitě, druhá pak na úloze zadané parametricky.

Zadání první úlohy: Antikvář koupil knihu za sedminu její původní ceny a prodal ji za tři osminy její původní ceny. Jaký zisk v procentech má antikvář?[71]

Řešení první úlohy: Dle zavedené terminologie se jedná o úlohu zadanou neurčitě, konkretizujme původní cenu knihy. Předpokládejme, že kniha stojí 56 Kč. Potom ji antikvář koupil za 8 Kč (jedna sedmina původní ceny) a prodal jí za 21 Kč (tři osminy původní ceny). Jeho zisk je 13 Kč, což v procentech odpovídá 162,5 %.

Výsledek: Zisk antikváře je 162,5 %.

Poznámka: Z hlediska finanční matematiky se jedná o velmi „chudou" úlohu, neboť do zisku se nepromítají žádné další náklady antikváře.

Didaktická poznámka: Je vhodné s žáky provést více konkretizací a ukázat, že výsledek na volbě nezáleží.

Zadání druhé úlohy: Je dáno přirozené číslo n. Určete číslo x, které má tuto vlastnost: Přičteme-li ho k číslu n, dostaneme stejný výsledek, jako když ho vynásobíme číslem n.

Řešení druhé úlohy: Úloha obsahuje jeden parametr n a jednu neznámou x. Konkretizace spočívá ve volbě konkrétních hodnot za parametr n.

1. $n = 1$

$$\begin{aligned} 1 + x &= 1 \cdot x \\ 1 &= 0 \end{aligned}$$

Druhé tvrzení je zjevně nepravdivé a tudíž takové x neexistuje.

---

[71] Úloha je převzata z (Jaroš, 2012).

2. $n = 2$

$$\begin{aligned} 2 + x &= 2 \cdot x \\ x &= 2 \end{aligned}$$

3. $n = 3$

$$\begin{aligned} 3 + x &= 3 \cdot x \\ x &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

4. $n = 4$

$$\begin{aligned} 4 + x &= 4 \cdot x \\ x &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Na základě konkretizací můžeme provést zobecnění a vyslovit hypotézu.

Hypotéza: Ke každému přirozenému číslu $n > 1$ existuje číslo $\frac{n}{n-1}$, které má vlastnost, že přičteme-li ho k číslu n, dostaneme týž výsledek, jako když ho vynásobíme číslem n.

Důkaz: Nechť n je přirozené číslo větší než 1. Potom platí:

$$\begin{aligned} n &= n \\ n^2 &= n^2 \\ n^2 + n - n &= n^2 \\ \frac{n + n^2 - n}{n - 1} &= \frac{n^2}{n - 1} \\ \frac{n}{n - 1} + n &= \frac{n}{n - 1} \cdot n \end{aligned}$$

Výsledek druhé úlohy: Nechť n je přirozené číslo. Pro $n = 1$ nemá úloha řešení. Jestliže $n > 1$, pak hledaným číslem je číslo $\frac{n}{n-1}$.

Úskalí strategie

Strategii KaZ lze s úspěchem použít pouze u určitého typu úloh. Jedná se o takové úlohy, které jsou zadány neurčitě či parametricky a kde pro řešitele může být obtížné určit, který objekt je parametrem, či za který objekt je možno provést konkrétní volbu. Použití této strategie vyžaduje zkušenost a v případě parametricky zadaných úloh i určitý cvik s jejich řešením.

Přínos strategie

U strategie KaZ vidím dva základní přínosy. V prvé řadě se jedná o propedeutiku zavedení rovnicového aparátu. K tomu slouží vybrané úlohy zadané neurčitě. Žáci po několika konkrétních volbách zjistí, že na volbě nezáleží (obdobně jako u strategie UFP).

Další přínos spatřuji v příležitosti zdokonalit se v rozlišování různých typů úloh, kdy se řešitel naučí rozpoznávat závislé a nezávislé proměnné úlohy.

1.4.9 Zobecnění a konkretizace (ZaK)

G. Pólya (2004) hovoří o třech variantách heuristiky *zobecnění* (*generalization*). Nejprve ukazuje, že zobecněním konkrétních situací lze získat obecně platné vztahy, a demonstruje to na součtu řady. Tuto variantu zobecňování nazývá *indukce* (*induction*). Druhá varianta odpovídá mnou vymezované strategii zobecnění a konkretizace, jak ji vymezuji dále, a G. Pólya tuto variantu nazývá *paradox vynálezce* (*inventor's paradox*). Třetí variantou je zobecnění, které je založeno na algebraizaci zadání úlohy, kdy konkrétní číselné údaje v úloze jsou nahrazeny proměnnými. V (Pólya, 1981) už klade důraz především na třetí variantu zobecnění.

Obdobně ke strategii zobecnění přistupuje W. A. Wickelgren (1995), který na rozdíl od G. Pólyi hovoří o různých rolích zobecnění. Největší důraz klade na roli, která se zabývá obecně platnými vztahy. W. A. Wickelgren na příkladu řešení kvadratické rovnice $7x^2+2x-4=0$[72] ukazuje, že nejjednodušší způsob řešení je zobecnit konkrétní zadání na $ax^2+bx+c=0$, kde se předpokládá, že řešitel je schopen ho pomocí známého vztahu vyřešit. W. A. Wickelgren tak zdůrazňuje skutečnost, že zobecnění má v této roli význam pouze tehdy, pokud vede na úlohu, kterou řešitel již umí vyřešit, tzn. předložená úloha je pouze konkretizací řešiteli známé obecné úlohy. W. A. Wickelgren uvádí, že Pólyova druhá varianta je poměrně náročná a o jejím praktickém uplatnění vyjadřuje určitou skepsi, pokud řešitel dopředu nezná řešení[73].

T. Tao (2006) uvádí strategii zobecni úlohu (*generalize the problem*) jako jednu z řešitelských strategií, které pozměňují zadání úlohy.

Autoři, kteří se zaměřují v problematice řešení úloh na matematickou stránku procesu řešení úlohy, vnímají zobecnění jako první variantu Pólyova vymezení. Z těchto autorů lze uvést (Engel, 1998) či (Larson, 1983).

Vymezení strategie

Jak je uvedeno výše, strategie ZaK nepatří mezi obvyklé. Její idea je založena na skutečnosti, že po nahrazení určitých objektů v úloze objekty obecnějšími, může řešitel snadněji nahlédnout řešení úlohy. Stěžejní myšlenkou je, že řešitel nezobecňuje úlohu jako takovou, ale pouze určité objekty. V řadě případů však dochází k tomu, že zobecněním objektů v úloze získáme obecnější úlohu, která v sobě zahrnuje celou třídu úloh daných společnou zobecněnou vlastností.

Stejně jako strategie KaZ je i strategie ZaK dvojkroková. V prvním kroku dochází k zobecnění vstupního objektu, řešitel vyřeší nově získanou úlohu a ve druhém kroku pak úlohu konkretizuje na původní objekt. V některých případech zobecnění umožní řešiteli získat vhled do úlohy a konkretizací pak vyřeší původní úlohu a v jiných případech vyřešením zobecněné úlohy řešitel získá řešení celé třídy úloh a konkretizací pouze poukáže na skutečnost, že dané řešení (popř. výsledek) platí i pro původní úlohu.

[72](Wickelgren, 1995, s. 180)

[73]Personally, I am somewhat skeptical of the alleged benefits of trying to solve a more general problem, when the solution to the more general problem is not known to the problem solver. (Wickelgren, 1995, s. 183)

V určitých úlohách obsahuje jejich zadání data, která nejsou pro řešení nezbytná. Zobecněním pak dochází k tomu, že řešitel položí důraz na skutečnosti, které jsou důležité pro řešení úlohy.

Vzhledem k tomu, že strategie ZaK operuje s konkrétním vstupním objektem, má blíže ke strategii An, než ke strategii KaZ, neboť ta pracuje s neurčitě či parametricky zadanými úlohami.

Pojetí, které uvádí W. A. Wickelgren, nepovažuji za heuristickou strategii, ale za přímý způsob řešení, neboť se přímo odvolává na dříve získanou znalost či dovednost a pouze ji aplikuje na dané objekty v úloze.

Úlohy ilustrující strategii

Zadání první úlohy: Je dán pravidelný osmistěn a přímka. Najděte rovinu, která prochází přímkou a dělí osmistěn na dvě stejně objemné části.[74] [75]

Řešení: Pravidelný osmistěn má celou řadu vlastností, které nejsou explicitně uvedeny v zadání úlohy, ale o kterých lze předpokládat, že je řešitel zná. Jednou z těchto vlastností je skutečnost, že pravidelný osmistěn je těleso středově souměrné. V rámci řešení řešitel vytvoří novou úlohu, kde původní objekt – osmistěn – nahradí objektem obecnějším, libovolným středově souměrným tělesem.

Zadání obecnější úlohy: Je dáno středově souměrné těleso a přímka. Najděte rovinu, která prochází přímkou a dělí těleso na dvě stejně objemné části.

Řešení obecnější úlohy: Řešitel může provést konkretizaci středově souměrného tělesa, která mu umožní získat vhled do problematiky. Domnívám se, že vhodnou konkretizací je nahrazení obecného středově souměrného tělesa koulí. V tomto zúžení úlohy je zřejmé, že rovina procházející přímkou, musí procházet středem koule (bodem a přímkou je rovina jednoznačně určená, za předpokladu, že střed koule neleží na dané přímce). Návratem k obecnější úloze pak získáváme výsledek.

Výsledek obecnější úlohy: Hledaná rovina musí procházet přímkou a středem středově souměrného tělesa.

Konkretizací obecnějšího objektu – středově souměrného tělesa – na pravidelný osmistěn řešitel získá požadovaný výsledek.

Výsledek: Hledaná rovina musí procházet přímkou a středem pravidelného osmistěnu[76].

Zadání druhé úlohy: Rozhodněte, který zlomek je větší: $\frac{123456788}{123456789}$ nebo $\frac{123456787}{123456788}$.

Řešení: Jednou z možností jak řešit tuto úlohu je použít přímý způsob a prostředek kalkulačka (obecně libovolný počítací stroj). Domnívám se, že je poměrně nesnadné zadat tyto zlomky na kalkulačce. Nahraďme objekty, které se vyskytují v úloze obecnějšími objekty.

[74] A straight line and a regular octahedron are given in position. Find a plane that passes through the given line and bisects the volume of the given octahedron. (Pólya, 2004, s. 108)

[75] Zadání úlohy a řešení strategií An bylo publikováno v (Eisenmann a Přibyl, in print; Eisenmann, Přibyl a Novotná, in print).

[76] V řadě úloh i autorských řešeních nebývá specifikován vzájemný vztah mezi vstupními objekty. G. Pólya se nezabývá vzájemnou polohou přímky a pravidelného osmistěnu. Z hlediska řešení úlohy bývá zvykem provést diskuzi i vůči vzájemné možné poloze vstupních objektů.

Zadání obecnější úlohy: Rozhodněte, který zlomek je větší: $\frac{n+1}{n+2}$ nebo $\frac{n}{n+1}$.
Řešení obecnější úlohy: Uvedeno na straně 35.
Výsledek obecnější úlohy: $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}$.
Výsledek: Protože věta platí pro libovolné n, pak platí i pro volbu $n = 123456787$, kterou získáme původní úlohu.

Úskalí strategie

Strategie ZaK klade na řešitele nemalé nároky. Musí mít nejen znalosti ze sledované oblasti, ale i z dalších oblastí matematiky a také dostatečné množství zkušenosti nejen se samotnou strategií. Zatímco základní idea strategie KaZ je obvyklá – nahradit složitější nebo obecnější situaci jednodušší situací – myšlenka, na které je vybudována strategie ZaK, je zcela neobvyklá. Nebývá zřejmé (a ani obvyklé), že nahrazením konkrétní situace obecnou situací, dojde ke zjednodušení řešení úlohy.

Druhým obvyklým úskalím je neporozumění strategii ZaK jako takové. V matematice je obvyklé a žádoucí, aby se řešitel (a zejména student) snažil o zobecňování. Posouvá tím nejen své hranice v porozumění matematice, ale v některých případech i hranice matematiky obecně. Strategie jako taková nespočívá v zobecňování úlohy, neboť tento proces vede k obecnější úloze či dokonce k výzkumnému problému, ale v zobecnění objektů, které se nacházejí v úloze. V některých případech může dojít k zobecnění úlohy, ale to není prvoplánovým cílem strategie ZaK.

Přínos strategie

Domnívám se, že stěžejní přínos strategie ZaK spočívá v rozvoji řešitele. Promýšlení úlohy z hlediska obecnějšího vstupního objektu může řešiteli umožnit uvědomit si podstatnou vlastnost vstupního objektu, která vynikne právě v určitém zobecnění. V první ilustrující úloze je to skutečnost, že pravidelný osmistěn je středově souměrný.

1.4.10 Srovnání strategií KaZ, ZaK a An

Strategie KaZ a ZaK patří do skupiny generujících novou úlohu. Strategie se od sebe odlišují zejména nároky, které kladou na řešitele. Zatímco strategie KaZ je poměrně jednoduchá a je použitelná a pro různé třídy úloh, strategie ZaK je náročná a nelze dopředu vymezit typ úloh, pro které bude použitelná. Pokud někteří autoři připouštějí ideu této strategie, obvykle se k ní uchylují po vyřešení několika konkrétních úloh a to s cílem posunout řešitele dál, popř. zobecnit získané výsledky.

Nelze také říci, že strategie ZaK je „inverzní strategií“ ke strategii ZaK. Z hlediska manipulace se vstupními objekty se domnívám, že má blíže ke strategii An, alespoň v prvním kroku. U strategie An dochází k nahrazení vstupního objektu „přátelštějším“ objektem, naopak u strategie ZaK obecnějším objektem. Do určité míry lze konstatovat shodu i ve druhém kroku. Cílem obou strategií je totiž najít postup řešení. Zatímco u strategie An je obvykle nalezen přímo algoritmus řešení, v případě strategie ZaK může řešitel zůstat pouze na úrovni získání vhledu do úlohy.

1.4.11 Cesta zpět (CZ)

Podobně jako u strategie UFP, tak i v případě strategie CZ její princip spadá mezi již dlouho známé postupy řešení úloh. Jak uvádí celá řada autorů (Pólya, 2004; Hintikka a Remes, 1974) počátky „strategie“ lze vysledovat až k Pappovi z Alexandrie, přičemž hovoří o Pappově *analytické metodě* (*method of analysis*), kterou prováděl oběma směry a na kterou navazovala *syntéza* (*method of synthesis*).

G. Pólya v (2004) sice vnímá strategii CZ (*working backwards*, *work backwards*) jako heuristiku, avšak rozšiřuje ji i mimo rámec matematických úloh a zmiňuje psychologické aspekty této ideje. Kapitola pojednávající o strategii CZ je také jediné místo v (Pólya, 2004), kde se autor zabývá psychologií zvířat. G. Pólya v (1981) nazývá strategii CZ *zpětným plánováním* (*regressive planning*) a řadí ji mezi obecnější a užitečné způsoby, jak se vypořádat s úlohou, avšak poukazuje na skutečnost, že *„řešitel musí mít určitou představu, jak překonat mezeru mezi neznámou a vstupními daty.“*[77] (Pólya, 1981, s. 29 druhého dílu)

Autoři opírající se o historický aspekt strategie CZ obvykle uvádějí její použití v geometrických konstrukčních úlohách. A. Engel v (1998) se zaměřil právě na negeometrické úlohy a ukazuje také negeometrický příklad z nedávné historie – vyvození eliptických funkcí C. G. J. Jacobim.

Vzhledem k oblibě a historickému pozadí je zřejmé, že tato strategie se poměrně často objevuje v publikacích věnovaných řešení úloh, a to nezávisle na cílové skupině (žáci ZŠ, SŠ, olympionici), jak dokládají (Wickelgren, 1995; Larson, 1983; Posamentier a Krulik, 1998). Zmínka nebo příklad užití se potom objevuje i u dalších autorů, kteří se zabývají problematikou řešení úloh.

Strategie CZ je i předmětem celé řady výzkumů, z nichž vybírám (Lester, Garofalo a Kroll, 1989), kde autoři tuto strategii zařadili do výzkumu z následujícího důvodu: aby řešitel mohl strategii CZ použít k řešení, *„musí si řešitel systematickým způsobem uspořádat dostupné informace“*[78] (s. 31), a dále aby dosáhl řešení *„musí postupovat krok za krokem“*[79] (s. 31), což na něj klade jiné nároky než ostatní strategie.

Vymezení strategie

Základní ideou strategie CZ v mém pojetí je hledání posloupnosti kroků, které převedou podmínky ze zadání na konkrétní výsledek. V případě řešení úloh obvykle hledáme cíl – výsledek – prostřednictvím postupu, který buď známe či neznáme. V případě strategie CZ je oním hledaným cílem postup, neboť omezující podmínky úlohy určují výsledek do té míry, že může (a obvykle bývá) pro řešitele snadno představitelný. Zatímco v případě rovnice (lineární, kvadratické, exponenciální, ...) neznáme výsledek, i když můžeme mít o něm určitou představu, tak v případě úloh, kde lze s úspěchem využít strategii CZ obvykle známe výsledek požadovaných operací, ale neznáme proces, jak tohoto dosáhnout. Následující příklad ilustruje úlohu, kterou lze s úspěchem řešit strategií CZ.

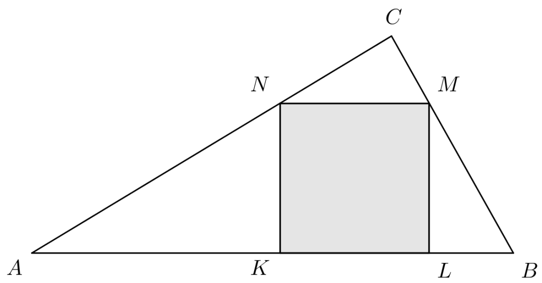
[77] ...but obviously we need some ideas from the subject matter to work across the gap from the unknown to the data.

[78] ...students need to organize the available information in a systematic manner

[79] ...to proceed toward a solution in a step by step fashion

Zadání: Vepište čtverec do daného trojúhelníku. Dva vrcholy čtverce nechť leží na základně trojúhelníku, zbývající dva vrcholy čtverce nechť leží každý na jednom z ramen trojúhelníku[80]. [81]

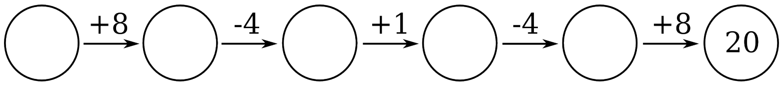
Následující obrázek (který není součástí zadání) 1.14 ukazuje, jak bude vypadat požadovaný výsledek. Neznámou je v tomto případě konstrukce (proces), kterou očekávaného výsledku (konstrukce) dosáhneme.



Obrázek 1.14: Ilustrativní obrázek zadání

Velice často se o cestě zpět hovoří v případě matematických hadů, kteří se objevují na 1. stupni ZŠ. Tento přístup ilustruje následující příklad.

Zadání: Do prázdných polí na obrázku 1.15 vepiš čísla tak, aby provedené operace byly správné. Jaké číslo je v hadovi první?



Obrázek 1.15: Matematický had pro 1. stupeň ZŠ

Takto zadaná úloha by mohla být pojímána, že je řešená cestou zpět. Obvyklým slovním spojením je také „řešena od konce“. Povaha úlohy je však jiná. Úloha je zaměřena na inverzní operace k operacím uvedeným nad šipkami. Úloha může být řešena i strategií UFP, jak je ukázáno na straně 55.

Dobrými rozlišovacími znaky skutečnosti, že úloha by mohla být řešitelná strategií CZ, jsou:

- existence představy, jak má vypadat výsledek;
- neznámou je proces.

Při řešení úlohy lze začít obvyklými slovy: „Předpokládejme, že úloha má řešení a výsledek vypadá následovně.“ Jak vypadal bezprostřední krok vedoucí k výsledku?

[80] Inscribe a square in a given triangle. Two vertices of the square should be on the base of the triangle, the two other vertices of the square on the two other sides of the triangle, one on each. (Pólya, 2004, s. 23)

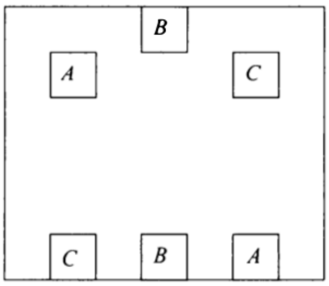
[81] Úloha byla publikována v (Břehovský, et al., 2013).

Řešitel provádí analýzu daného výsledku a vždy se snaží najít bezprostřední krok, který vedl k tomu, který zná. Na konci se řešitel dopracuje ke vstupním údajům ze zadání. Obrácením celého postupu pak získá hledaný proces – konstrukci.

Dále uvádím dvě úlohy, které ilustrují strategii CZ a nespadají do oblasti konstrukční geometrie.

Úlohy ilustrující strategii

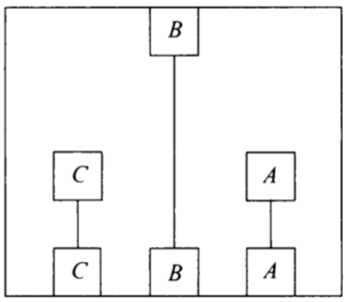
Zadání první úlohy: Uvažujme o následujícím schématu (viz obrázek 1.16). Můžete propojit každý čtverec na horní straně se čtvercem na spodní straně tak, aby byla spojena stejná písmena a nedošlo ke křížení čar? Nesmíte překročit hranu rámu[82].



Obrázek 1.16: Schéma vstupní situace. Obrázek je převzat z (Zeitz, 2007, s. 15)

Řešení: Sám autor v tomto případě nehovoří o strategii CZ, ale nazývá proces řešení *zbožným přáním* (*wishful thinking*). Já se domnívám, že se jedná o úlohu, která ilustruje ideu CZ.

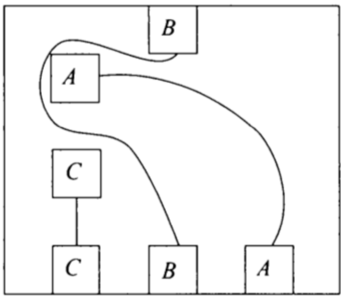
Předpokládejme, že takové řešení existuje. Řešitel uspořádá čtverce při horní hraně tak, aby byla propojena odpovídající písmena, čáry se nekřížily a žádná čára neopustila ohraničující obdélník. Jeden z možných výsledků je na obrázku 1.17.



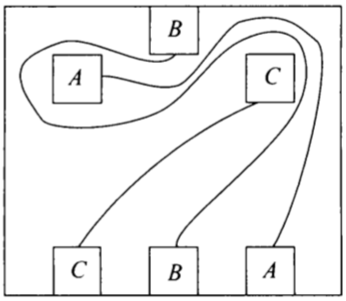
Obrázek 1.17: Předpokládaný výsledek. Obrázek je převzat z (Zeitz, 2007, s. 16)

[82]Consider the following diagram. Can you connect each small box on the top with its same-letter mate on the bottom with paths that do not cross one another, nor leave the boundaries of the large box? (Zeitz, 2007, s. 15)

Obrázky 1.18 a 1.19 ilustrují cestu zpět, kterou se řešitel ubírá k zadání, tj. k původní pozici čtverců. Pro řešení je zvolen řešitelský obrázek a použit prostředek papír a tužka (v tomto případě by bylo možné vyrobit i papírový model).



Obrázek 1.18: První krok řešení. Obrázek je převzat z (Zeitz, 2007, s. 16)



Obrázek 1.19: Druhý krok řešení a výsledek. Obrázek je převzat z (Zeitz, 2007, s. 16)

Výsledek: Ano, čtverce podle požadovaných podmínek můžeme propojit (viz obrázek 1.19).

Zadání druhé úlohy: Dokažte větu: $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}$.[83]

Řešení: Řešitel musí najít korektní posloupnost kroků, které na sebe navazují a na jejímž konci bude výše uvedená věta.

Předpokládejme, že uvedená věta platí. Uvádím předchozí krok, ze kterého jsme se mohli dostat k výsledku.

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n(n+2) < (n+1)^2$$

Krok, který tomuto předcházel, by mohl vypadat takto:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1$$

Řešitel elementárními algebraickými úpravami získá poslední tvrzení, které je pravdivé.

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < 1$$

Výsledek: Obrácením posloupnosti získáme požadovaný důkaz.

[83] Úloha je též na straně 35.

Úskalí strategie

Za základní úskalí strategie CZ považuji riziko, že řešitel neporozumí povaze zadané úlohy a pokusí se o použití strategie tam, kde to není vhodné.

Přínos strategie

Za jedno z nejvýraznějších pozitiv strategie CZ považuji, že řešitel si explicitně hned na začátku řekne: „Předpokládejme, že úloha má řešení.“ Na rozdíl od jiných strategií je toto velmi silným motivačním elementem v procesu řešení. Řešitel obvykle přistupuje k úloze s tím, že je řešitelná (dokud se mu nepodaří dokázat opak), avšak v případě CZ si toto hned na začátku zdůrazní.

Druhým, poměrně silným pozitivem je skutečnost, že řešitel si musí utvořit určitou představu o výsledku. Domnívám se, že tímto se u něj posiluje schopnost získávat vhled do určitých úloh.

Třetím pozitivem je skutečnost, že předmětem řešení není výsledek ve smyslu např. soustavy rovnic, ale proces, kterým se převedou vstupní údaje na výstupní za určitých omezujících podmínek.

1.4.12 Zavedení pomocného prvku (ZPP)

G. Pólya (2004) vnímá strategii ZPP v širších souvislostech, než jak ji vymezuji já, a rozlišuje dva základní typy pomocných prvků. Prvním typem je *pomocný prvek* jako takový (*auxiliary element*) a druhým pak je *pomocná úloha* (*auxiliary problem*). Smyslem pomocné úlohy je umožnit řešiteli buď získat vhled do původní úlohy, nebo vyřešit úlohu jako takovou. V mé práci je podstatným rozlišovacím momentem skutečnost, že v případě pomocné úlohy vytváří řešitel „objekt“, který je na stejné úrovni jako úloha. Z toho důvodu nevnímám druhý typ pomocného prvku jako samotnou heuristickou strategii, ale v této práci ukazuji, že existuje celá množina způsobů jak a z jakého důvodu vytvářet „pomocné“ úlohy – strategie An, PU, KaZ, ZaK a VP.

G. Pólya (2004) rozděluje i první typ pomocného prvku na různé druhy. Pokud pomocným prvkem je např. přímka, hovoří o *pomocné přímce* (*auxiliary line*), pokud do úlohy zavádí neznámou, pak ji nazývá *pomocnou neznámou* (*auxiliary unknown*). V určitých případech je pomocným prvkem i matematická věta – *lemma* (*auxiliary theorem*), např. při důkazových úlohách. O lemmatu jako pomocném prvku se zmiňují i A. S. Posamentier a T. Salkind (1988) a nazývají ho *pomocným důkazem* (*auxiliary proof*). Z. Michalewitz a D. B. Fogel (2000) používají jako pomocný prvek při řešení úloh funkci a hovoří o *pomocné funkci* (*auxiliary function*).

G. Pólya (1981) uvádí ještě jeden typ pomocného objektu – *pomocný obrázek* (*auxiliary figure*). Pólyovo pojetí pomocného obrázku odpovídá mému pojetí grafické cesty, a to jak ilustrativnímu, tak řešitelskému obrázku.

P. Zeitz (2007) vnímá strategii ZPP jako určitou metodu řešení úlohy a nerozlišuje mezi pomocným objektem a pomocnou úlohou ve smyslu G Pólyi. Tento způsob nahlížení problematiky mu umožňuje zavést *pomocnou konstrukci* (*auxiliary construction*). Ve své práci poukazuje na skutečnost, že v určitých případech je poměrně snadné zavést vhodný prvek do úlohy, např. v případě pomocné neznámé, a v jiných pak je to obtížné. Nalezení vhodného pomocného prvku tak může být dílem náhody: „Tato metoda je silná, ale ne vždy snadná. Vyžaduje dovednosti, zkušenosti a štěstí, aby řešitel nalezl ty správné objekty, které má dokreslit do obrázku.“[84] [85]

J. R. Hayes (1981) používá pouze jeden typ objektu jako pomocný, a to úlohu.

Z hlediska pojmenování je zajímavá práce A. H. Schoenfelda (1982), který jako jeden z mála uvádí *zavádění pomocných prvků* (*introducing auxiliary elements*) jako heuristickou strategii.

Vymezení strategie

Základní idea strategie ZPP vychází ze skutečnosti, že zavedením prvku do úlohy, který se v ní původně nevyskytoval, řešitel snadněji dosáhne požadovaného výsledku. Tento prvek nazývám *pomocným prvkem*. Pomocné prvky jako takové lze rozdělit do dvou skupin. První skupina je tvořena prvky, které se v úloze nevyskytují a jsou závislé na řešiteli. Zavedení takového prvku obvykle závisí na řešitelově zkušenosti a jeho znalostech a zavedený pomocný prvek může být ze zcela jiné matematické oblasti. Druhá skupina je tvořena prvky, které se explicitně nevyskytují v zadání úlohy, avšak jejich existence je podmíněna buď vstupními objekty úlohy, nebo jejím matematickým kontextem. O prvcích ze druhé skupiny hovořím jako o *skrytých prvcích*.[86]

Oproti G. Pólyovi vnímám strategii ZPP jako jeden celek a nerozlišuji různé typy. Jak ukazuji dále, jedním zajímavým specifikem strategie ZPP je skutečnost, že po zavedení může, ale nemusí vzniknout nová úloha, tudíž tuto strategii nemůžeme zařadit ani do skupiny strategií generujících úlohy, ani do skupiny strategií pracujících pouze se zadanou úlohou.

Úlohy ilustrující strategii

Následující úlohy ilustrují jednotlivé možnosti užití strategie ZPP. První úloha vede na vytvoření pomocné úlohy, druhá úloha obsahuje tzv. skrytý prvek a třetí úloha je zajímavá svým historickým kontextem.

Zadání první úlohy: V oboru reálných čísel řešte rovnici $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$.[87]

Řešení první úlohy: Uvedená algebraická rovnice je řešitelná v reálných číslech, avšak přímé nalezení kořenů může být nesnadné. Povšimneme-li si, že exponenty u neznámé jsou sudá čísla, může nám to evokovat zavedení pomocného prvku pomocí substituce $y = x^2$, což vede k vytvoření nové úlohy.

Zadání (pomocné) úlohy: V oboru reálných čísel řešte rovnici $y^2 - 5y + 6 = 0$.

Řešení (pomocné) úlohy: Řešení se opírá o znalost vztahu pro nalezení kořenů kvadratické rovnice.

Výsledek (pomocné) úlohy: Výsledkem jsou reálná čísla $y_1 = 2$ a $y_2 = 3$.

[84] This method is powerful, but not always easy. It takes skill, experience, and luck to find the right objects to add to a given figure. (Zeitz, 2007, s. 262)

[85] Srovnej s pedagogickou zásadou č. 93 ze strany 36.

[86] Strategie ZPP byla popsána v (Přibyl a Ondrušová, 2014).

[87] Úloha byla publikována v (Přibyl a Ondrušová, 2014).

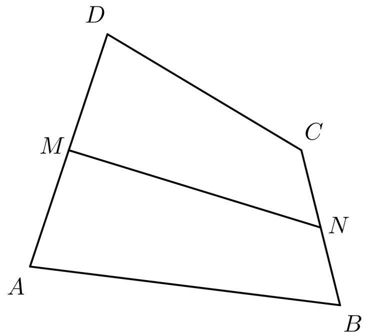
Vraťme se nyní k substituci. Namísto jedné bikvadratické rovnice máme dvě rovnice kvadratické, přičemž nalezení jejich řešení je rutinní záležitostí a s ohledem na zvolenou substituci získáme čtyři řešení původní rovnice.

Výsledek první úlohy: Následující čísla jsou hledanými hodnotami neznámé x: $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ a $-\sqrt{3}$.

Zadání druhé úlohy: V rovině je dán libovolný konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Označme M, N po řadě středy stran AD a BC. Dokažte nerovnost

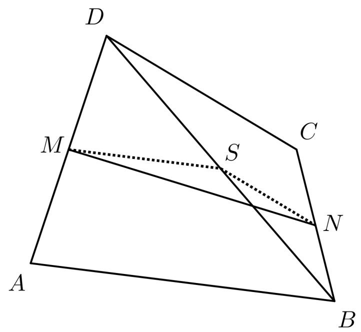
$$|MN| \leq \frac{1}{2}(|AB| + |CD|).$$[88]

Řešení druhé úlohy: Zadání úlohy vhodně ilustruje obrázek 1.20. Protože jediná podmínka kladená na čtyřúhelník je, že je konvexní, potom se jedná o úlohu zadanou neurčitě a uvedená ilustrace je konkretizací zadání.



Obrázek 1.20: Ilustrace zadání druhé úlohy

Idea důkazu je zřetelnější po zavedení pomocného prvku – úhlopříčky BD, na které je sestrojen její střed S (viz obr. 1.21).



Obrázek 1.21: Pomocným prvkem je úsečka BD

Idea důkazu je pak následující: Úsečky MS a NS jsou po řadě střední příčky v trojúhelnících ABD a CDB, proto platí

$$|MS| = \frac{1}{2}|AB| \quad \wedge \quad |NS| = \frac{1}{2}|CD|.$$

[88] Úloha byla publikována v (Přibyl a Ondrušová, 2014).

Odtud plyne

$$|MN| \leq |MS| + |NS| = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|),$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, když S leží na úsečce MN.

Výsledek: Výše uvedený postup popisuje ideu důkazu daného tvrzení.

Zadání třetí úlohy: Tráva na louce roste stále stejně rychle a je všude stejně hustá. Víme, že 60 krav by spáslo všechnu trávu za 24 dnů a 30 krav za 60 dnů. Kolik krav by spáslo trávu za 100 dnů?[89] [90]

Řešení třetí úlohy: Předpokládejme, že každá kráva spase za den stejné množství trávy. Jako pomocný prvek zavedeme množství trávy, které spase jedna kráva za jeden den. Toto množství nazveme porce. *Porce* je uvažovaným pomocným prvkem.

Na konci 24. dne spáslo 60 krav 1440 porcí. Na konci 60. dne spáslo 30 krav 1800 porcí. Za 36 dnů proto vyrostlo na louce 360 porcí, tzn. 10 porcí za den. Na začátku tak muselo být na louce 1200 porcí. Do konce stého dne musí krávy spást 2200 porcí. Hledaný počet krav je proto

$$\frac{2200}{100} = 22.$$

Výsledek třetí úlohy: Trávu by spáslo 22 krav.

Mnou uváděná třetí úloha bývá v literatuře nazývána Newtonovou úlohou. I. Newton (1707, s. 89) ji formuluje obecně a jedno konkrétní řešení uvádí jako příklad (s. 90). Za zmínku také stojí, že v literatuře se obvykle píše o kravách, avšak I. Newton ve své úloze uvádí voly.

Úskalí strategie

Při nedostatku zkušeností je zde nemalá pravděpodobnost, že řešitel nenalezne vhodný pomocný prvek, který by do úlohy zavedl.

Přínos strategie

Idea strategie spočívá v zavedení prvku do úlohy, který se tam původně nevyskytoval. Způsob zavádění pomocného prvku může být nahodilý, jak tomu z počátku bývá u různých geometrických úloh, než řešitel získá určitý vhled do úlohy. Pravidelným nácvikem lze docílit toho, že řešitel po zhlédnutí zadání úlohy obvykle dokáže odhadnout typ a způsob zavedení pomocného prvku. Stejně je tomu tak v případě algebraických úloh vedoucích na řešení rovnic vyšších řádů. Pravidelným opakováním řešení si řešitel upevní proces substituování[91]. Z toho je patrno, že existují určité třídy úloh, které se lze naučit řešit právě strategií ZPP.

[89] Zadání úlohy je převzato z (Kopka, 2013, s. 54).
[90] Úloha byla publikována v (Přibyl a Ondrušová, 2014).
[91] Různé druhy substitucí lze nalézt v (Přibyl a Ondrušová, 2014).

1.4.13 Vypuštění podmínky (VP)

Při řešení úlohy se setkáváme se situacemi, kdy se požaduje splnění více různých podmínek. Klasickým příkladem jsou konstrukční úlohy, které požadují sestrojení objektu, jenž splňuje dané požadavky, nebo diofantické rovnice, které kromě nalezení řešení požadují, aby bylo celočíselné. Základní idea této heuristické strategie se opírá o skutečnost, že při řešení úlohy lze některou z podmínek vypustit. Řešitel následně řeší „ochuzenou“ úlohu a může buď získat vhled do úlohy, nebo získá množinu výsledků, jejíž podmnožinou je i hledaný výsledek původní úlohy.[92]

O strategii VP se zmiňuje řada autorů. G. Pólya (2004, s. 23) hovoří o vypuštění části podmínky (*dropping a part of the condition*), nikoliv však jako o heuristice (ve smyslu G. Pólyi), ale tento způsob řešení používá jako ilustraci chování učitele ve třídě, přičemž učitel se snaží vést žáky při řešení úlohy. Užití „strategie“ při řešení úlohy je popsáno formou dialogu mezi učitelem a žákem. P. Zeitz (2007) také nehovoří o strategii VP jako takové, ale klade si otázku „*Co dělá danou úlohu obtížnou?*“[93] (s. 27). Jednou z možných odpovědí, které nabízí, je vypuštění právě té „podmínky“, která dělá pro řešitele danou úlohu obtížnou[94]. T. Tao (2006, s. 5) také explicitně nezmiňuje tuto strategii, avšak její ideu řadí mezi *strategie agresivnějšího typu* (*more aggresive type of strategy*), které jsou založeny na výrazných modifikacích úlohy.

O vypuštění určitých podmínek v zadání se zmiňuje i I. S. Robertson (2001) z hlediska zadání úlohy[95], kdy poukazuje na skutečnost, že zadání úlohy může obsahovat nadbytečné údaje (a podmínky, které jsou na sobě závislé). Podstatné je, že řešitel vypuštěním některých podmínek (ve smyslu nadbytečných) nemění výsledek úlohy.

G. Pólya se ke strategii VP vrací v (1981), kde dané problematice věnuje poměrně dost pozornosti a snaží se čtenáře naučit, aby každou úlohu rozdělil na vstupní údaje, neznámé a podmínky. Vychází z předpokladu, že právě uvědomění si této skutečnosti umožní řešiteli lépe pracovat s úlohou a ukazuje, že právě strategie VP (i nadále ji nepovažuje za heuristickou strategii) je jednou z možností.

Vymezení strategie

Základní idea této strategie se opírá o skutečnost, že při řešení řady úloh je požadováno splnění několika podmínek. Pokud řešitel jednoznačně identifikuje určující podmínky, potom může některou z nich vypustit, popř. nahradit jinou. Vypuštění podmínky může řešiteli umožnit získat vhled do úlohy, nebo získat výsledek (přímým způsobem nebo užitím jiné heuristické strategie), který je nadmnožinou původního výsledku. Znovupřijetím podmínky řešitel získá omezení na danou množinu a tím hledaný výsledek.

Pro užití této strategie VP je zapotřebí, aby řešitel

- byl schopen rozlišit jednotlivé podmínky úlohy,
- měl dostačující míru znalostí i zkušeností,

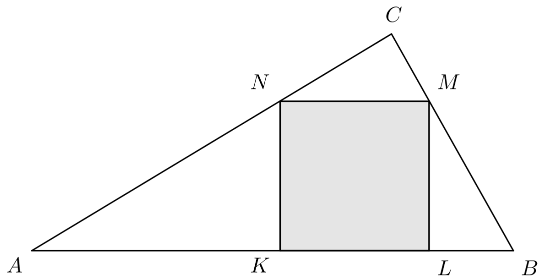
[92] Určité části byly publikovány v (Eisenmann a Břehovský, 2013).
[93] What is it about the problem that makes it hard?
[94] Tato otázka se již objevila v kapitole o An (s. 57).
[95] Viz dobře zadaná úloha (s. 19).

- měl určitý vhled do problematiky, ze které úloha vychází.

Úloha ilustrující strategii

Zadání: Vepište čtverec do daného trojúhelníku. Dva vrcholy čtverce nechť leží na základně trojúhelníku, zbývající dva vrcholy čtverce nechť leží každý na jednom z ramen trojúhelníku[96]. [97]

Řešení: Při řešení geometrické úlohy je vhodné si načrtnout ilustrativní obrázek, který znázorní požadovaný stav. Do daného obrázku 1.22 jsem vyznačil mnou zavedené značení bodů.



Obrázek 1.22: Ilustrativní obrázek zadání

Informace ze zadání úlohy můžeme rozdělit následovně:

- **Vstupní údaje:** Daný trojúhelník; G. Pólya neuvádí, o jaký trojúhelník se jedná. Protože v úloze se hovoří o obecném trojúhelníku, tak ke správnému vyřešení *celé úlohy* je zapotřebí vyřešit dílčí případy, které odpovídají různým typům trojúhelníků. Pro potřeby této práce uvedu pouze jedno konkrétní řešení odpovídající trojúhelníku ABC na ilustrativním obrázku.
- **Neznámá:** čtverec $KLMN$
- **Podmínky:**
  (a) vrcholy čtverce K, L leží na základně AB (volba odpovídá ilustrativnímu obrázku)
  (b) vrchol čtverce M leží na ramenu BC
  (c) vrchol čtverce N leží na ramenu AC

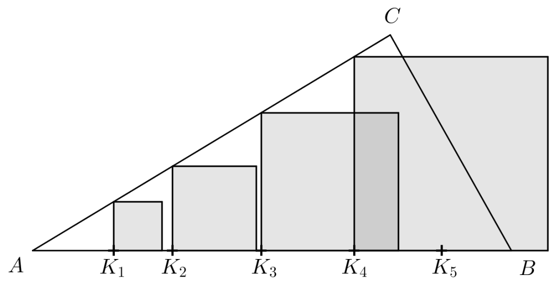
Sestrojení čtverce, který splní všechny tři podmínky, je relativně obtížnou úlohou. Vypuštěním podmínky (b) ze zadání úlohy, získáme novou úlohu, jejíž zadání uvádím s již zavedeným značením.

[96] Inscribe a square in a given triangle. Two vertices of the square should be on the base of the triangle, the two other vertices of the square on the two other sides of the triangle, one on each. (Pólya, 2004, s. 23)

[97] Úloha byla publikována v (Břehovský, et al., 2013).

Zadání: Je dán trojúhelník ABC. Sestrojte čtverec $KLMN$ tak, aby strana KL náležela úsečce AB a bod N náležel úsečce AC.

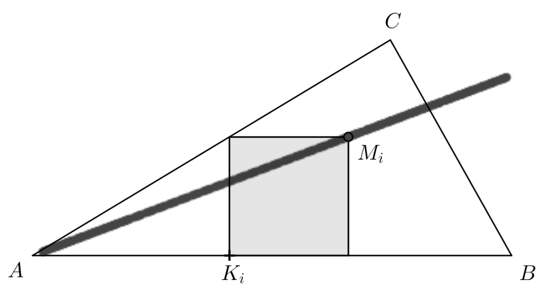
Řešení: Sestrojení požadovaného čtverce je relativně jednoduché. Úloha má jeden parametr – polohu bodu K. Na obrázku 1.23 je zobrazeno několik poloh bodu K, které jsou rozlišeny indexy, a jim odpovídající čtverce $KLMN$.



Obrázek 1.23: Různé čtverce pro volbu parametru K.

Pro hodnoty K_4 a K_5 parametru K čtverec $KLMN$ požadovaných vlastností neexistuje. V prvním případě je sice splněna podmínka (c), ale není splněna podmínka (a). Ve druhém případě není splněna ani jedna z podmínek (a) a (c). Z důvodu přehlednosti v obrázku nejsou vyznačeny odpovídající body L_i, M_i a N_i čtverce $K_iL_iM_iN_i$. Označování bodů odpovídá označení bodů zavedenému na obrázku 1.22.

Vhodnou volbou prostředku (ve smyslu užití heuristických strategií) – počítače s instalovaným programem dynamické geometrie, je řešitel schopen provést celou řadu zkoumání závislosti čtverce na poloze parametru K v reálném času. Řada programů dynamické geometrie má funkci zanechávání stopy bodu, takže řešitel může aktivací této funkce získat dobrou představu o poloze bodu M v závislosti na parametru K, jak to znázorňuje obrázek 1.24.



Obrázek 1.24: Stopa bodu M_i v závislosti na parametru K.

Je zřejmé, že hledaný bod M je průsečíkem polopřímky AM_i a úsečky BC, kde bod M_i je vrcholem pomocného čtverce splňujícího podmínky (a) a (c)[98].

Výsledek: Hledaná konstrukce vypadá (ve zkratce) následovně: řešitel nejprve sestrojí pomocný čtverec $K_1L_1M_1N_1$, dále sestrojí bod M jako průsečík polopřímky AM_i a úsečky BC, patou kolmice na úsečku AB z bodu M je bod L, bod K je průsečíkem úsečky AB a kružnice $k_1(L, LM)$ a bod N je průsečíkem úsečky AC a kružnice $k_2(M, LM)$.

Úskalí strategie

Prvním úskalím strategie VP je, že řešitel musí být schopen ze zadání úlohy abstrahovat dílčí podmínky. K tomu je zapotřebí určité zkušenosti.

Druhým úskalím strategie, nikoliv následného procesu řešení, je vhodná volba podmínky k vypuštění. Aby řešitel vhodně vybral podmínku, musí mít alespoň minimální vhled do dané problematiky.

Přínos strategie

Domnívám se, že největším přínosem strategie VP je skutečnost, že řešitel se naučí provádět analýzu úlohy a dokáže určit vstupní údaje, specifikovat neznámé a vyčlenit podmínky.

[98]Lze říci, že řešitel při řešení úlohy použil strategii ZPP, kde pomocným objektem je zmiňovaný čtverec.

Kapitola 2

Krátkodobé experimenty

Není to experiment, pokud víte, že to bude fungovat.

Jeff Bezos

Krátkodobé experimenty probíhaly od září 2012 do května 2013, přičemž jejich původním účelem bylo stanovení vhodných strategií, které by bylo možné zařadit do realizace dlouhodobého experimentu. Po spuštění dlouhodobého experimentu bylo cílem krátkodobých experimentů zodpovědět otázky, které heuristické strategie je možné předat žákům do aktivního užívání a jaký vliv bude mít tato strategie na žáky. Krátkodobých experimentů se zúčastnilo 11 tříd a každý z nich trval 3 až 4 měsíce[1].

2.1 Cíle experimentu

Cíle krátkodobých experimentů, kterými se členové výzkumného týmu zabývali:

- Které strategie je vhodné zařadit do dlouhodobého experimentu?
- Je možné dosáhnout určitého posunu u žáka v řešení matematických úloh danou heuristickou strategií v průběhu čtyřměsíční výuky?
- Které strategie jsou žáci schopni naučit se aktivně používat během této výuky?
- Změní se přístup žáků k řešení úloh? Pokud ano, jak?

2.2 Příprava krátkodobých experimentů

Samotnému spuštění krátkodobých experimentů předcházela osmiměsíční činnost, kdy členové výzkumného týmu systematicky pracovali na vytvoření jak českého popisu heuristických strategií, tak baterie úloh ke každé popisované strategii, kde užití určité strategie bylo nejefektivnějším způsobem řešení. V červnu 2013 proběhly také dvě

[1] Krátkodobé experimenty, včetně metodologie, výsledků a závěrů jsou podrobně popsány v (Novotná, Eisenmann a Přibyl, 2014) a (Novotná, Eisenmann a Přibyl, 2015b).

přednášky pro učitele (v rámci dalšího vzdělávání učitelů), které byly věnovány heuristickým strategiím. Účastníci přednášek – učitelé – byli osloveni, zda by nechtěli s námi spolupracovat na realizaci experimentů, z nich řada nabídku přijala.

Experimentu se zúčastnilo celkem 8 různých učitelů, přičemž u některých proběhl krátkodobý experiment dvakrát. Většinu učitelů členové výzkumného týmu znali, neboť se s nimi pravidelně setkávali na přednáškách pro učitele, nebo tito učitelé byli účastníky *Letní školy učitelů matematiky a fyziky*, pořádané Přírodovědeckou fakultou UJEP. Lze konstatovat, že styl výuky každého z učitelů by se dal označit jako konstruktivisticky orientovaný, přičemž postoj učitele k výuce odpovídal pedagogickému realizmu. Věk, pohlaví a ani délka praxe nebyly omezujícím kritériem. Spolupracující učitelé byli za svoji práci finančně odměněni.

2.2.1 Vybrané heuristické strategie

Vzhledem k tomu, že projekt byl teprve v prvním roce řešení, přístup ke strategiím opírali členové výzkumného týmu především o práce G. Pólyi (2004) a J. Kopky *Ako riešiť matematické problémy*. Strategie byly pojímány tak, jak je uvedeno ve zmíněných monografiích a nebyla provedena žádná klasifikace strategií.

V době probíhajících krátkodobých experimentů členové výzkumného týmu nabízeli učitelům tyto strategie[2]:

- Cesta zpět
- Použití definice
- Přeformulování problému
- Strategie invariantu
- Strategie sporem
- Zavedeni pomocného prvku
- Zobecněni
- Vypuštění podmínky
- Analogie
- Rozklad na jednodušší případy
- Systematické experimentování
- Pokus – ověření – korekce
- Řešitelský obrázek
- Užití grafu funkce

[2] V této kapitole obvykle nepoužívám zavedené zkratky, neboť, přestože se názvy strategií shodují s námi vymezenými strategiemi, tak obsahově mají blíže ke strategiím, jak je vymezují jiní autoři. Zavedená zkratka je použita pouze v případě, kdy se odkazuji na mnou vymezenou strategii.

2.3 Experimentální výuka

Každý učitel si na začátku experimentu vybral dvě heuristické strategie z námi nabízených. Výběr provedl ve spolupráci s členem výzkumného týmu tak, aby:

- předkládané úlohy byl schopen co nejlépe integrovat do výuky;
- heuristické strategie odpovídaly možnostem třídy,
- byl schopen vytvářet nebo vyhledávat další úlohy.

Před samotným spuštěním experimentální výuky psali žáci vstupní test, který obsahoval 4 úlohy z vytvořené sady úloh. Úlohy byly voleny tak, aby se daly řešit heuristickou strategií a přímým způsobem, a to buď použitím znalosti, nebo vhledem. Úlohy do testu byly vybírány na základě osobní zkušenosti členů výzkumného týmu, přičemž každý z participujících učitelů měl možnost se k připravovanému testu předem vyjádřit a mohl tak ovlivnit výběr úloh. Stejný písemný test pak byl žákům předložen i po skončení experimentální výuky.

Každý učitel měl ve výzkumném týmu svého konzultanta, se kterým komunikoval. Jednou za týden nebo čtrnáct dní mu podával zprávu o proběhlé výuce, o úlohách, které řešil na hodině, a o zajímavých žákovských řešeních. Jeho partner z výzkumného týmu mu naopak dodával další úlohy, popř. modifikoval již dodané na základě podnětů od učitele.

2.3.1 Scénář experimentální výuky

Aby výuka probíhala ve všech třídách obdobně, byli učitelé seznámeni s následujícím scénářem, kterým se měli řídit.

Učitel předloží žákům úlohu a nechá je pracovat samostatně. Pokud se ve třídě najde někdo, kdo vyřeší úlohu, tak je učitelem vyzván, aby ostatním ukázal své řešení. Pokud jiný žák vyřeší úlohu jiným způsobem, opět ukáže své řešení ostatním. Po prezentaci žákovských řešení je cílem učitele vyvolat diskuzi.

Pokud žádný z žáků nebude prezentovat řešení zamýšlenou strategií, učitel ukáže řešení zadané úlohy právě touto strategií a předloží žákům k řešení obdobnou úlohu.

2.3.2 Popis výzkumného vzorku

Krátkodobých experimentů se zúčastnilo 11 tříd Ústeckého kraje, přičemž 8 tříd bylo ze základních škol a 3 třídy ze čtyřletých gymnázií. Celkový počet žáků byl 285, přičemž 98 žáků bylo dvanáctiletých – šesté třídy, 109 žáků bylo čtrnáctiletých – osmé třídy a 78 žáků bylo sedmnáctiletých – druhé ročníky gymnázia. Ve všech případech se jednalo o běžné třídy, které nebyly orientovány žádným směrem. Učitelé charakterizovali tyto třídy z hlediska školního výkonu v matematice jako průměrné až lehce podprůměrné.

Žáci nebyli sledování jako jednotlivci, tj. členové výzkumného týmu nezkoumali změny u jednotlivých žáků, zda žák použil/nepoužil heuristickou strategii, byl/nebyl úspěšný, ale zabývali se změnami u třídy jako celku. Z toho důvodu nebyli žáci testováni na začátku a ani na konci a charakteristika žáků – třídy se opírala pouze o názor učitele a jeho hodnocení školního výkonu v matematice.

Z toho důvodu byly vytvořeny tři skupiny žáků podle věku a neprováděla se analýza jednotlivých výkonů samotných tříd, ale celé skupiny. Sledovaným kritériem totiž nebyly změny u žáků, ale výskyt heuristické strategie u dané úlohy, či změna úspěšnosti řešení úlohy.

2.4 Výsledky a diskuze

2.4.1 Výběr heuristických strategií

Spolupracující učitelé si z uvedené nabídky vybrali následující strategie: Cesta zpět, Přeformulování problému, Zavedeni pomocného prvku, Zobecnění, Vypuštění podmínky, Analogie, Rozklad na jednodušší případy, Systematické experimentování, Pokus – ověření – korekce, Řešitelský obrázek a Užití grafu funkce.

Z těchto strategií byly následující strategie vyzkoušeny ve více třídách: Pokus – ověření – korekce, Systematické experimentování, Cesta zpět, Analogie, Zavedení pomocného prvku a Vypuštění podmínky. Pouze u těchto strategií je možné vyvodit nějaké závěry, které by se neodvolávaly pouze na zjištění v jedné třídě.

Vzhledem k povaze strategie Užití grafu funkce bylo možné provést experiment pouze ve třídách na gymnáziu.

2.4.2 Změny ve vnímání heuristických strategií

Na základě analýzy práce žáků v hodinách a analýzy žákovských řešení vstupních a výstupních testů členové výzkumného týmu identifikovali následující fenomén:

Různí žáci u stejné úlohy za použití stejné heuristické strategie postupovali různými způsoby – jeden do úlohy zavedl proměnnou, tj. provedl algebraizaci úlohy, druhý si celou situaci vyjádřil obrázkem.

Na základě tohoto zjištění jsem navrhl některé přístupy nepovažovat za heuristickou strategii, ale za způsob provádění heuristické strategie, čímž vznikla námi vypracovaná dvojrozměrná klasifikace užití heuristických strategií. Později byla tato klasifikace rozpracována do trojrozměrné klasifikace, kdy třetím rozměrem se stal prostředek, kterým je daná strategie prováděna (viz kapitola 1.3, s. 31).

Druhou změnou bylo vyčlenění určitých přístupů z množiny heuristických strategií. Jedná se zejména o použití definice a nakreslení obrázku. G. Pólya (2004) je sice uvádí jako heuristické strategie, ale domnívám se, že se spíše jedná o pokyny, kterými učitel řídí činnost žáka. Patrno je to z toho, kdy v textu přímo užívá pobídky „užij definici“ (*go back to definitions*), nebo „nakresli si obrázek“ (*draw a picture*).

U řady strategií došlo k „projasnění“ jejich vnímání. Členové výzkumného týmu si uvědomili, že strategie POK a SE patří ke stejnému typu, kdy jejich společným rysem je experimentování. U strategie Zobecnění došlo k postupnému rozpadu na KaZ a ZaK. Strategie CZ a An byly přesněji vymezeny.

Celkově lze říci, že krátkodobé experimenty měly velký vliv na vnímání strategií členy týmu, vedly k preciznějšímu vymezení a zavedení pojmu užití heuristických strategií.

2.4.3 Strategie vybrané do dlouhodobého experimentu

Ještě před ukončením všech krátkodobých experimentů již byly známy některé strategie, které byly zařazeny do dlouhodobého experimentu. Jednalo se o následující strategie: POK, SE, CZ, ZPP a An. Později k nim přibyla ještě strategie KaZ. Tyto strategie byly vybrány na základě následujících zjištění:

- Učitelé účastnící se krátkodobých experimentů se o nich vyjadřovali jako o strategiích, které jsou poměrně univerzální, snadno naučitelné.
- Experimentální strategie byly učiteli hodnoceny poměrně vysoko, neboť umožňovaly žákům začít řešit úlohu, i když neznali na počátku algoritmus řešení.
- Zvládnutí těchto strategií má přímý dopad na standardní úlohy v matematice. Těmito úlohami jsou myšleny úlohy „neolympijské“ a jim podobné.

2.4.4 Naučitelnost strategií a úspěšnost řešení úloh (v krátkém časovém horizontu)

K následujícím závěrům došli členové výzkumného týmu na základě analýzy práce žáků v hodinách – dle hlášení učitelů – a analýzy žákovských řešení vstupních a výstupních testů.

- Experimentální strategie (POK, SE) a strategie CZ se dají naučit i během krátkodobého působení, strategie ZPP, VP a An nikoliv. Ty vyžadují patrně působení dlouhodobé. Důvodem snadnější naučitelnosti může být algoritmický charakter prvně jmenovaných strategií.
- Pravidelným používáním strategie SE docházelo k tomu, že žáci začali získávat cit pro efektivní volbu startovací hodnoty.
- Jeden z učitelů nám hlásil i určité negativum strategie SE. U některých žáků docházelo po jejím osvojení k tomu, že ji volili jako první volbu řešení raději než např. sestavení rovnice či soustavy rovnic.
- Strategie sporem, Strategie invariantu a Rozklad na jednodušší případy se ukázaly jako obtížně naučitelné a na rozdíl od strategií Zobecnění, Analogie a Přeformulování problému se jednalo o strategie, které jsou specifické pro určité typy úloh.
- U strategií Analogie a Přeformulování problému poukazovali učitelé na nedostatek úloh, neboť se domnívali, že ke zvládnutí těchto strategií je zapotřebí vyřešit s žáky daleko více úloh, než je tomu v případě experimentálních strategií, nebo Cesty zpět.

2.4.5 Změny přístupu žáků k řešení úloh

Následující změny jsme zaznamenali na základě výpovědí učitelů:

- I při krátkodobém působení se změnil postoj některých žáků k řešení úloh (bylo pozorováno vždy u zhruba poloviny třídy). Žáci se přestali bát řešit úlohy, přestali je odkládat, pokud jim hned na začátku nebyl jasný postup řešení. Naučili se řešení hledat, experimentovat a nevzdávat řešení.
- Čtyři učitelé udávali, že se vlivem experimentu zlepšila schopnost se vyjadřovat a to zhruba u poloviny žáků. To se projevilo mimo jiné také tím, že ve výstupních testech byla řešení podrobněji komentovaná. Žáci ve více případech své kroky zdůvodňovali.

2.5 Závěr

Lze říci, že krátkodobé experimenty splnily svůj primární cíl – podařilo se vytipovat heuristické strategie, které budou vhodné pro dlouhodobý experiment. Dále se podařilo ukázat, že některé heuristické strategie mají potenciál snadno se naučit. Pro členy výzkumného týmu však bylo podstatné zjištění, že se mění postoje žáků k řešení úloh. Všechna tato zjištění tak stála v základech dlouhodobého experimentu.

Kapitola 3

Výukový experiment

> Nemohu nikoho nic naučit, mohu je jen přimět myslet.
>
> Sokrates

Na řadě míst této práce je zmíněn tzv. dlouhodobý experiment. V této kapitole, která je mu cele věnována ho nazývám správně – *výukovým experimentem*. Sousloví „dlouhodobý experiment“ je ponechán v ostatních částech práce z důvodu terminologie zažité členy výzkumného týmu a z důvodu návaznosti na publikované výsledky[1]. Samotný výukový experiment je rozdělen do tří fází. První – přípravná – fáze trvala od ledna do září roku 2012 a jejím cílem bylo připravit výzkumné nástroje a zpracovat metodiku výukového experimentu a tato fáze probíhala paralelně s přípravou krátkodobých experimentů (viz kapitola 2, s. 82). Ty následně výrazně ovlivnily počátky druhé – realizační – fáze, která je tvořena *experimentální výukou*, a která probíhala od září 2012 do února 2014. Třetí – hodnoticí – fáze začala v březnu 2014 a pokračovala v roce 2015. Jejím cílem bylo vyhodnotit a zpracovat výsledky experimentální výuky.

Pojmy *výukový experiment* a *experimentální výuka* nevnímám v této práci jako synonyma. Prvně uvedený je v mém pojetí obecnější pojem, kterým se snažím postihnout celou situaci dotýkající se experimentu ve škole, druhým pojmem mám na mysli přímou výuku, kterou se působí přímo na žáky.

3.1 Cíle experimentu

Cílem dlouhodobého experimentu bylo zodpovědět vybrané otázky, které byly položeny na začátku výzkumu. Tyto otázky se do velké míry překrývají s cíli zmíněnými na začátku mé práce (str. 8). Otázky, které měl zodpovědět tento experiment, jsou následující:

1. Které strategie budou žáci volit spontánně, tj. před zahájením experimentální výuky?

[1] Dlouhodobý experiment, včetně metodologie, výsledků a závěrů je podrobně popsán v (Eisenmann, Novotná, Přibyl a Břehovský, 2015).

2. Které strategie se naučí žáci aktivně používat pod vedením učitele?

3. Jak budou žáci úspěšní při řešení úloh po proběhnutí experimentální výuky, budou-li používat heuristické strategie?

4. Změní se některé položky žákovo *kultury řešení problému žákem*[2] v důsledku experimentální výuky?

5. Jaký je vztah mezi položkami žákovo *kultury řešení problému žákem* a jeho dovedností řešit úlohy a používat heuristické strategie?

V první fázi výukového experimentu byly také formulovány dvě hypotézy:

1. Po proběhnutí experimentální výuky budou žáci schopni ve větší míře aktivně užívat heuristické strategie při řešení úloh.

2. Po skončení experimentální výuky budou mít žáci lepší výsledky ve všech komponentách KRP (vyjma inteligence).

3.2 Příprava výukového experimentu

Samotnému zahájení experimentální výuky předcházela celá řada přípravných prací, z nichž některé navazovaly na probíhající krátkodobé experimenty. Z hlediska výukového experimentu je tedy možné krátkodobé experimenty nazvat *pilotážemi*, avšak je dobré si uvědomit, že kromě základní otázky výběru vhodných strategií do výukového experimentu, zodpovídaly i na dílčí otázky, které se do výukového experimentu přímo nepromítly.

Nastavení parametrů experimentální výuky bylo také ovlivněno vymezením pojmu *užití heuristických strategií* (viz kapitola 1.3, s. 31). Vzhledem k tomu, že nebylo možné zajistit, aby každý žák absolvující experimentální výuku měl po celou dobu k dispozici osobní počítač (nebo notebook), členové výzkumného týmu se rozhodli, že budou sledovat pouze dva atributy užití heuristických strategií, a to *použití dané heuristické strategie* a *cestu jejího použití*. Z prostředků byl kladen důraz především na používání tužky a papíru a tam, kde to okolnosti (podmínky) umožnily, byl jako prostředek použit osobní počítač.

Vliv na volbu heuristických strategií měly také mnou vymezené vlastnosti strategií (viz kapitola 1.3.4, s. 39). Na základě hodnot vlastností strategií byl upraven soubor heuristických strategií, které byly předkládány žákům v rámci výukového experimentu. Hlavním kritériem pro výběr byla možnost úspěšného uplatnění heuristické strategie žákem.

Pro experimentální výuku byly vybrány následující strategie:

- Systematické experimentování (SE);
- Pokus – ověření – korekce (POK);
- Analogie (An);

[2] Námi vyvinutý nástroj – viz dále.

- Zavedení pomocného prvku (ZPP);
- Cesta zpět (CZ);
- Zobecnění a konkretizace (ZaK).

Dále byl vytvořen nástroj pro sledování změn vybraných atributů žáka, o kterých členové výzkumného týmu předpokládali, že se dotýkají problematiky řešení úloh. Kromě členů týmu se na vytvoření tohoto nástroje podílela také psycholožka Z. Hadj--Moussová. Tento nástroj jsme nazvali *kultura řešení problému žákem.*

3.2.1 Kultura řešení problému žákem (KRP)

Kultura řešení problému žákem[3] je nástroj, který byl vytvořen členy výzkumného týmu za účelem poznání žákových schopností a dovedností ve vztahu k řešení úloh. Členové týmu se domnívali, že dovednost řešit úlohy se odvíjí od celé řady vnitřních atributů řešitele, z nichž pro potřeby výukového experimentu (a celkově i výzkumu) vybrali následující čtyři:

1. inteligenci;
2. dovednost číst text s porozuměním;
3. kreativitu;
4. dovednost využít stávajících znalostí v matematice.

Domnívám se, že o nezbytnosti zařazení položky inteligence do struktury KRP nelze pochybovat. Vztah inteligence a dovednosti řešit úlohy je oboustranný. Určitá míra inteligence je nezbytná pro řešení úloh (Raaheim a Brun, 1985; Wenke, Frensch a Funke 2005) a naopak, řešení úloh (problémů) lze využít jako nástroj pro měření inteligence[4] (Eysenk, 1979).

Druhou komponentou struktury KRP je dovednost číst text s porozuměním. Jak uvádí řada autorů (Pape, 2004; Schoenfeld, 1992; Hite, 2009) je tato dovednost klíčovou pro úspěšné řešení úloh. Zařazení této komponenty do struktury KRP se mimo jiné opírá i o čtyři fáze řešení úlohy, jak je vymezuje G. Pólya (2004), kde první fází je porozumění úloze (*understanding the problem*). V základech řešení každé úlohy je porozumění úloze, které se opírá o zmiňovanou položku KRP. Tím se rozumí, že řešitel je na základě přečtení úlohy schopen postihnout vazby v úloze, stanovit vstupní a výstupní proměnné úlohy a vhodně uchopit vstupní data.

[3]V publikacích členů výzkumného týmu tento pojem překládáme jako *Culture of problem solving* (CPS). Se slovním spojením *Culture of problem solving* se můžeme setkat v řadě prací, z nichž uvádím např. (Clarke, Goos and Morony; 2007; Reiss and Törner, 2007), kde slovo kultura není přesně vymezeno a lze toto slovo chápat jako označení pro kultivovanější přístup ke studované problematice. Např. Clarke, Goos and Morony (2007) užívají slovo kultura ve spojení se slovem dotaz – *Culture of inquiry* – kultura bádání (badatelsky orientovaná výuka). Při stanovování názvu struktury KRP řešitelský tým vnímal slovo *kultura* jako systém různých významů, činností a vzorců chování, které se projevují ve škole při řešení úloh.

[4]Eysenck-Fumeaux-White model

Třetí komponentou struktury KRP je kreativita. O klíčové roli kreativity se zmiňuje celá řada autorů. M. Nadjafikhah, N. Yaftian, a S. Bakhshalizadeh (2012) hovoří o kreativním řešení úloh: *„Na školní úrovni kreativita v matematice obecně souvisí s řešením nebo vytvářením úloh.“*[5] (s. 290) S. A. Chamberlin a S. M. Moon (2005) uvádějí: *„Kreativita odkazuje na určitou oblast procesu myšlení užívanou matematiky, když řeší nerutinní úlohu.“*[6] (s. 38) Ve shodě se R. J. Sternbergem (2005) členové řešitelského týmu nevnímají kreativitu jako jeden atribut, ale chápou ji jako soubor dílčích atributů, které se podílejí na celkovém obrazu kreativity. Zabývali jsme se proto výzkumy, které kreativitu pojímají právě takto. U. Sak a C. J. Maker (2005) vycházejí z předpokladu, že kreativita se demonstruje právě na řešení úloh. Kreativitu měří, stejně jako K. S. Meador (1997), ve čtyřech položkách – plynulost (*fluency*), nápaditost (*originality*), pružnost (*flexibility*) a zpracování (*elaboration*).

Čtvrtou komponentou je dovednost využít stávajících znalostí v matematice. Základní ideou této komponenty je skutečnost, že pro úspěšné řešení úloh je nutné nejen mít znalosti, ale také dovednost je užívat. Je nutno poznamenat, že v této oblasti nepanuje úplně shoda v používání pojmů. Já rozlišuji tři úrovně pojmu: *informace – poznatek – znalost*. Informace jsou data, která zůstávají nezpracovaná. Jako poznatek vnímám informaci, která je předána určitému jedinci (nebo ji nabyl sám), dotyčný ji zařadí na určité úrovni do své kognitivní struktury a je schopen si ji podle potřeby vybavit. Vnímám tak celou řadu informací, které si pamatuji. Jako znalost vnímám poznatek, který je nejen zařazen do kognitivní struktury jedince, ale je schopen interagovat s dalšími poznatky a vytvářet tak funkční síť, pomocí které je žák schopen řešit celou škálu různých úloh. Hranici mezi poznatkem a znalostí vnímám jako neostrou.

U každého žáka účastnícího se experimentu byly měřeny jednotlivé položky KRP. Inteligence byla měřena pouze na začátku výukového experimentu, dovednost číst text s porozuměním, kreativita a dovednost využít stávajících znalostí v matematice byly měřeny na začátku i na konci výukového experimentu. Důvodem, proč jsme měřili inteligenci pouze jednou, je použitý test, který je popsán dále.

Z. Hadj-Moussová se podílela na testování inteligence, dovednosti číst text s porozuměním a kreativitě. Dovednost využít stávajících znalostí v matematice je konstruktem výzkumného týmu. V závěru výukového experimentu se na interpretaci některých výsledků podílela I. Wedlichová.

Testování inteligence

Pro měření inteligence byl použit *Váňův inteligenční test* (VIT). Jde o test, který je v České republice dostatečně validován a který přihlíží ke školnímu prostředí. Tento test byl vybrán z důvodu ověřené korelace mezi žákovým školním výkonem a počtem získaných bodů (Hrabal a Hrabal, 2002). Jedná se o verbální inteligenční test, který je vhodný pro skupinové testování a který je rozdělen na jednotlivé subtesty podle sledované oblasti. Výsledek je dán počtem získaných bodů.

[5] At the school level, creativity in mathematics is generally related to problem solving and or problem posing.

[6] Creativity refers to the domain-specific thinking processes used by mathematicians when engaged in nonroutine problem solving.

Testování dovednosti čtení s porozuměním

Dovednost čtení s porozuměním se testovala následovně: žákům byl předložen text v délce jednoho odstavce a cílem každého žáka bylo krátce popsat smysl a obsah předloženého textu. Hodnotilo se nalezení a „vypíchnutí“ klíčových informací. Žákův výkon byl hodnocen na stupnici od 1 do 5, kde 1 znamená výborně a 5 nedostatečně (stupnice odpovídá školní klasifikaci).

Měření kreativity

K měření kreativity byl použit Christensen-Guilfordův test (Kline, 2000), který pokrývá divergentní myšlení a který měří výše zmíněné položky kreativity. Kvalitativní vyhodnocení jednotlivých položek testu je převedeno na číselnou hodnotu a celkové dosažené skóre je nazváno indexem kreativity. Čím je vyšší hodnota indexu kreativity, tím více je možné považovat žáka za kreativnějšího.

Testování dovednosti využít stávající znalosti v matematice

Dovednost využít stávajících znalostí v matematice (DVSZ) je položka KRP, kterou vyvinuli členové výzkumného týmu. Podstatou je, že se žákovi předloží dvojice úloh – dyáda, kde první úloha testuje přítomnost požadované znalosti a druhá úloha už testuje samotnou dovednost. Žákům byl tento test předložen v písemné podobě a sestával se ze čtyř dyád. Dyády se lišily ve vstupním a výstupním testu.

Vyhodnocování probíhalo následovně: každé úloze byla přiřazena buď hodnota správně (S), nebo nesprávně (N). Každá dyáda byla kódována jednou ze čtyřech možností SS, SN, NS, NN a každému žákovi byly přiřazeny dvě uspořádané čtveřice (vstupní / výstupní) těchto kódů. Jednotlivým žákům pak byla přiřazena hodnota, vypočtená dle následujícího vztahu:

$$\text{DVSZ} = (SS_{\text{fin}} - SS_{\text{in}}) + 3 \times (SN_{\text{fin}} - SS_{\text{in}}) + 2 \times (NS_{\text{fin}} - NS_{\text{in}}) + 2 \times (NN_{\text{fin}} - NN_{\text{in}}),$$

kde „fin“ značí výstupní test a „in“ vstupní. Na rozdíl od předchozích hodnota DVSZ popisuje změnu žákovy dovednosti využívat stávajících znalostí v matematice. Čím vyšší je hodnota, tím více došlo ke zlepšení sledovaného atributu.

Rozdíl $(SS_{\text{fin}} - SS_{\text{in}})$ popisuje změnu v počtu správně vyřešených dyád na vstupu a výstupu. Koeficient před rozdílem popisuje váhu, kterou členové týmu přikládali jednotlivým změnám. Je zřejmé, že pro potřeby výzkumu bylo nejdůležitější sledovat situaci, kdy znalost je přítomna – první úloha v dyádě vyřešena správně, avšak žák ji nebyl schopen použít – druhá úloha v dyádě nebyla vyřešena správně, tedy stav SN. Naopak pro potřeby výzkumu bylo nejméně důležité sledovat situaci SS. Pokud znalost nebyla přítomna, pak pro potřeby výzkumu byly situace NS a NN stejné a dále se jimi členové týmu nezabývali.

Pro ilustraci uvádím jednu dyádu, která byla použita pro testování. Úloha a) testuje přítomnost znalosti, úloha b) testuje dovednost tuto znalost použít.

a) Načrtněte si úsečku délky 5 cm. Jak se změní její velikost, jestliže ji zobrazíme v podobnosti s koeficientem 2,5?

b) Strom vrhá stín délky 19 m a metrová tyč postavená kolmo k zemi stín dlouhý 2,5 m. Jak vysoký je strom?

3.2.2 Vstupní a výstupní test

Všichni žáci, kteří se zúčastnili výukového experimentu, psali na začátku i konci experimentu, test. Pro každou třídu byl vytvořen jiný test tak, aby respektoval věk žáků a předpokládané znalosti. Každý test se skládal z osmi úloh, přičemž některé úlohy se objevily ve více testech. Celkem bylo použito 15 různých úloh. Stejný test psali žáci jak na začátku, tak na konci výukového experimentu, přičemž jsme vycházeli z předpokladu, že žáci si nebudou úlohy z testu pamatovat. Úlohy, které byly použity v testu, nebyly učitelem v dané třídě předkládány v průběhu výukového experimentu a nebyly probírány po napsání vstupního testu.

Testy byly zadávány na listech papíru formátu A4, na kterých bylo vždy vytištěno zadání úlohy (na jedné straně byly vytištěna zadání dvou úloh) a za ním vynecháno místo, kam měl řešitel zaznamenat své řešení.

Úlohy do testu byly vybrány na základě pre-testu, přičemž většinu z nich bylo možné efektivně řešit alespoň dvěma různými heuristickými strategiemi a vždy bylo možné řešit úlohy přímým způsobem.

Tabulka 3.1 uvádí počet úloh v testu, které bylo možné řešit uvedenou heuristickou strategií, podle věku žáků.

	test pro žáky ve věku		
strategie	12–14	14–16	16–18
SE	3	3	3
POK	3	3	3
An	3	2	3
ZPP	2	3	2
CZ	2	2	2
KaZ	2	2	2

Tabulka 3.1: Počty úloh řešitelných určitou strategií, které byly použity v testu pro danou věkovou skupinu

Všechna žákovská řešení byla vyhodnocena a kódována z hlediska sledovaných jevů. Kódování postihovalo:

- zda žák řešil úlohu přímým způsobem, nebo heuristickou strategií;
- cestu, kterou žák při řešení použil;
- úspěšnost řešení úlohy (vyřešil/nevyřešil);
- neřešení úlohy – žák odevzdal „prázdný papír“, tj. vůbec na něj nezačal psát;
- nesmyslné řešení/odpověď - žákem odevzdané řešení vůbec nekorespondovalo se zadáním, např. se jednalo o automatickou kresbu, nebo v případě geometrické úlohy - různé fragmenty, různé čmáranice a podobně;

- neporozumění zadání – žák odevzdal správné/korektní řešení jiné úlohy, než jaká byla předložena; obvykle se tak stalo na základě skutečnosti, že něčemu neporozuměl v zadání, něco opomenul, či si neuvědomil nějaký vztah.

3.3 Realizace experimentální výuky

Výukový experiment probíhal od září 2012 do února 2014. Experimentu se zúčastnily čtyři třídy z Ústeckého a Středočeského kraje a Prahy.

3.3.1 Spolupráce s učiteli

Každé třídě byl přiřazen jeden člen týmu, který s učitelem dané třídy komunikoval po celou dobu experimentu. Cílem této komunikace bylo udržovat stálý kontakt se třídou, zaznamenávat postřehy z vyučování, dodávat učiteli metodiku k výuce jednotlivých heuristických strategií a vhodné úlohy.

Komunikaci jako takovou lze popsat jako intenzivní a systematickou, kdy učitel alespoň jednou týdně informoval „svého“ člena týmu o průběhu výuky. Součástí zprávy byly informace o písemných řešeních žáků, o dílčích problémech, které se během výuky vyskytly a o strategiích použitých žáky. Učitelé se také zaměřovali na změny v postojích žáků k matematice a řešení úloh. Pozorování měla subjektivní ráz. Pokud to umožňovaly časoprostorové podmínky, potom se člen týmu scházel s učitelem. Pokud ne, probíhala komunikace především elektronicky.

Členové týmu hospitovali jednou za šest měsíců ve výuce a pořizovali videozáznam z průběhu vyučovací hodiny s cílem zachytit atmosféru vyučování jako takového.

3.3.2 Scénář experimentální výuky

Aby výuka probíhala ve všech třídách obdobně, byli učitelé seznámeni s následujícím scénářem, kterým se měli řídit.

Učitel předloží žákům úlohu a nechá je pracovat samostatně. Pokud se ve třídě najde někdo, kdo vyřeší úlohu, tak je učitelem vyzván, aby ostatním ukázal své řešení. Pokud jiný žák vyřeší úlohu jiným způsobem, opět ukáže své řešení ostatním. Po prezentaci žákovských řešení je cílem učitele vyvolat diskuzi.

Pokud žádný z žáků nebude prezentovat řešení zamýšlenou strategií, učitel ukáže řešení zadané úlohy právě touto strategií a předloží žákům k řešení obdobnou úlohu.

Předložený scénář odpovídá scénáři u krátkodobých experimentů, kde se osvědčil. Snahou členů výzkumného týmu bylo, aby učitel sám si po čase začal klást otázky ohledně užití heuristických strategií a sám si začal vyhledávat či modifikovat úlohy, které bude předkládat žákům. Tím by žákům byly předkládány úlohy, které by odpovídaly probíranému učivu.

3.3.3 Výzkumný vzorek

Jak již bylo zmíněno, experimentální výuka probíhala ve čtyřech třídách, přičemž dvě třídy byly na základní škole a dvě na gymnáziu. Celkem se experimentu zúčastnilo 67 žáků a 4 učitelé.

Charakteristika učitelů a tříd

Učitelé zapojení do dlouhodobého experimentu byli vybráni na základě následujících kritérií:

- styl jejich výuky má konstruktivistický charakter;
- jejich postoj k výuce odpovídá pedagogickému realismu;
- aktivně pracují na svém dalším vzdělávání;
- po celou dobu experimentu budou vyučovat jednu a tutéž třídu;
- jsou ochotni s námi dlouhodobě spolupracovat.

Naopak délka pedagogické praxe nebyla omezujícím kritériem, stejně tak předchozí zkušenost s obdobnými experimenty. Tabulka 3.2 uvádí stručný přehled zúčastněných tříd, učitelů a žáků.

škola	město	učitel (věk)	počet žáků	věk žáků
ZŠ Pod vodojemem	Ústí nad Labem	Milan (61)	18	14–16
Gymnázium V. Hraběty	Hořovice	Hanka (58)	24	12–14
Gymnázium J. Nerudy	Praha	Jirka (32)	20	16–18
ZŠ Na Slovance	Praha	Alena (54)	6	14–16

Tabulka 3.2: Stručný popis zúčastněných tříd

Na jednotlivé třídy se odkazuji jménem učitele. Následují upřesňující poznámky k jednotlivým třídám.

Třída Milana – jedná se o výběrovou třídu (dané školy) se zaměřením na matematiku. Žáci jsou do této třídy vybíráni ve věku 11 let, a ze všech žáků základní školy je vybrán každý čtvrtý žák.

Třída Hanky – běžná třída gymnázia. Učitelka charakterizovala tyto žáky jako běžné žáky, odpovídající ve znalostech a schopnostech průměru žáků na českých gymnáziích.

Třída Jirky – běžná třída gymnázia. Učitel charakterizoval tyto žáky jako běžné žáky, odpovídající ve znalostech a schopnostech průměru žáků na českých gymnáziích.

Třída Aleny – učitelka charakterizovala tyto žáky jako podprůměrné žáky z hlediska školního výkonu. U této třídy došlo během výukového experimentu ke změně skladby vzorku. Na začátku bylo testováno 19 žáků, ze kterých 13 buď během školního roku, nebo při postupu z osmé do deváté třídy, opustilo třídu. Do třídy přibyli další žáci, a protože se neúčastnili experimentu od začátku, nebyli zařazeni do sledované skupiny. Experimentální výuka však probíhala v nové třídě beze změny, tj. žáci vzorku nebyli vyčleněni či jinak odděleni od zbytku třídy[7].

3.4 Výsledky a diskuze

Výsledky, které se objevují v této kapitole, jsou publikovány v následujících dvou pracích: (Eisenmann, Novotná, Přibyl a Břehovský, 2015) a (Novotná, Eisenmann a Přibyl, 2015).

3.4.1 Úspěšnost žáků v řešení úloh

V této části se zabývám dvěma fenomény, které se týkají vstupních/výstupních testů. Prvním je celková úspěšnost žáků při řešení úloh nezávisle na způsobu řešení. Druhým je výskyt „prázdných papírů“, tj. kdy žák neřešil úlohu vůbec.

Následující tabulka 3.3 přehledně ukazuje úspěšnost žáků.

	test	
třída	vstupní	výstupní
Hanky	44	58
Milana	54	84
Jirky	45	76
Aleny	21	35

Tabulka 3.3: Úspěšnost žáků v jednotlivých třídách (v %)

Z tabulky 3.3 je zřejmé, že v každé třídě došlo ke zlepšení z hlediska počtu úspěšně řešených úloh. V tuto chvíli však nelze přímo zodpovědět otázku č. 3: „Jak budou žáci úspěšní při řešení úloh na konci experimentu, budou-li používat heuristické strategie?“, neboť lze předpokládat, že úspěšnost žáků při řešení (výstupní test byl identický se vstupním) během trvání výukového experimentu přirozeně vzrostla.

Druhým sledovaným fenoménem je výskyt „prázdných papírů“, jehož změna je zaznamenána v tabulce 3.4.

Z tabulky 3.4 je zřejmé, že došlo k poklesu „prázdných papírů“. V tuto chvíli nelze říci, zda je to vlivem výukového experimentu nebo přirozeným zráním žáka, avšak lze se domnívat, že vzhledem k tomu, že během experimentální výuky žáci používali různé

[7] Popis třídy je podrobně uveden v (Novotná, Eisenmann a Přibyl, 2015).

	test	
třída	vstupní	výstupní
Hanky	17	8
Milana	16	4
Jirky	7	4
Aleny	38	25

Tabulka 3.4: Výskyt „prázdných papírů“ v jednotlivých třídách (v %)

experimentální strategie, je možno přičíst tento pokles výskytu sledovaného jevu právě ztrátě obav z experimentování[8].

3.4.2 Užití heuristických strategií

Údaje o užití heuristických strategií ve vstupním a výstupním testu jsou přehledně zpracovány v tabulce 3.5.

	Absolutní četnosti		Relativní četnosti (v %)	
třída	vstupní	výstupní	vstupní	výstupní
Hanky	22	55	11	29
Milana	7	31	5	22
Jirky	31	45	19	28
Aleny	2	10	4	21

Tabulka 3.5: Přehled absolutní a relativní četnosti užití heuristických strategií

Tabulka 3.5 nesleduje úspěšnost žáků v řešení úlohy při použití heuristických strategií. Absolutní četnost 22 ve vstupním testu třídy Hanky značí, že v celé třídě v osmi úlohách byla použita heuristická strategie právě ve 22 případech. Relativní četnost 11 % se potom vypočítá následovně: $22 : (24 \cdot 8)$, kde 22 je absolutní frekvence, 24 je počet žáků ve třídě a 8 je počet úloh ve vstupním testu.

Tabulka 3.6 uvádí užití heuristických strategií po jednotlivých strategiích.

Z tabulky 3.6 je zřejmé, že došlo k nárůstu užití u všech strategií. Je také zřejmé, že se zvýšila úspěšnost řešení úloh. Poslední sloupec tabulky uvádí, kolik úloh z celkového počtu 15 mohlo být řešeno danou strategií. Jak již bylo zmíněno, úlohy byly do testů voleny tak, aby kromě přímého způsobu řešení byly řešitelné alespoň dvěma heuristickými strategiemi.

Tabulka 3.6 nám dává odpověď na otázku č. 1: „Které strategie budou žáci volit spontánně, tj. před začátkem experimentu?“ Experimentální strategie (POK a SE)

[8]Vzhledem k počtu žáků ve třídě Aleny není použití popisné statistiky zcela adekvátní, avšak z důvodu homogenity zpracování se ho členové výzkumného týmu přidrželi.

strategie	vstupní test – četnost celková	vstupní test – četnost úspěšně použité strategie	výstupní test – četnost celková	výstupní test – četnost úspěšně použité strategie	počet úloh, které mohou být řešeny danou strategií
SE	19	16	41	35	9
POK	20	10	27	19	9
An	2	2	9	9	8
ZPP	6	4	33	19	7
CZ	10	6	13	13	6
KaZ	1	1	8	7	6

Tabulka 3.6: Přehled četností užití jednotlivých strategií

a CZ členové výzkumného týmu identifikovali v žákovských řešeních již ve vstupních testech, aniž by žáci věděli, že právě tyto strategie používají.

Lze konstatovat následující:

- Žáci ve výstupním testu při použití strategií CZ, An a KaZ byli skoro vždy úspěšní.
- Žáci ve výstupním testu při použití experimentálních strategií byli úspěšní ve více než 70 %.
- Žáci ve výstupním testu při použití strategie ZPP byli úspěšní ve více než 50 %.

Domnívám se, že interpretace úspěšnosti u strategií An a KaZ vzhledem k nízké četnosti výskytu je obtížná.

Výrazný nárůst užití ZPP lze přičíst dvěma okolnostem:

1. Žáci se naučili pod vedením učitelů pracovat přímo s „fyzickým zadáním“[9], pokud to zadání umožňuje. U výstupního testu již žáci neměli problém do zadání kreslit, dělat si poznámky a podobně. Toto obvykle není možné u klasických učebnic, které bývají žákům zapůjčeny.
2. Začít jakkoliv manipulovat s údaji v zadání je poměrně snadné, obzvláště v případě geometrických úloh, kdy žáci do zadání dokreslovali různé čáry apod. Oproti jiným strategiím nižší úspěšnost však svědčí o tom, že je poměrně obtížné dořešit danou úlohu. V průběhu experimentální výuky byli učitelé zásobeni stejným množstvím úloh pro každou strategii. Z postřehů některých učitelů však vyplývá, a vlastnosti strategií to potvrzují (viz kapitola **??**, s. 39), že pro některé strategie (např. POK, SE, CZ) stačí relativně (v porovnání s dalšími strategiemi) málo úloh pro správné uchopení strategie žákem, zatímco jiné strategie (An, KaZ) vyžadují daleko více úloh, které je třeba během nácviku řešit. Z vlastností

[9]Fyzickým zadaním je myšlen přímo pracovní list apod. Z osobní zkušenosti vím, že někteří žáci mají určité obtíže psát do zadání, které jim předložil učitel, do zadaného obrázku si dokreslovat různé prvky atp.

strategií je zřejmé, že jak An, tak KaZ vyžadují od řešitele zapojení v daleko větší míře.

Tabulka 3.7 ukazuje změny v cestách jak při užití heuristických strategií, tak i v přímém způsobu.

	aritmetická	algebraická	grafická
vstupní test	65	21	3
výstupní test	47	30	18

Tabulka 3.7: Četnosti užití jednotlivých cest (v %)

Z tabulky 3.7 je patrno, že došlo k nárůstu algebraické a zejména grafické cesty na úkor aritmetické cesty. Součet četností v jednotlivém řádku nedává 100 %, neboť některé způsoby řešení („prázdný papír“, nesmyslné řešení) nemohly být zařazeny ani pod jednu cestu. V případě, že se v průběhu řešení vyskytlo více cest, upřednostněna byla ta, která byla stěžejní pro správné řešení úlohy.

Domnívám se, že za nárůstem četnosti v případě algebraické cesty stojí fakt, že v případě Milanovo třídy se žáci v průběhu výuky naučili používat rovnice.

Za nárůstem četnosti grafické cesty stojí fakt, že si žáci častěji kreslili ilustrativní obrázek, na jehož základě pak řešili úlohu.

Závěrem této části lze konstatovat následující:

- vzrostla úspěšnost při řešení úloh;
- vzrostla četnost užití heuristických strategií;
- snížila se četnost „prázdných papírů“;
- došlo ke změně cest z aritmetické ve prospěch algebraické a grafické.

Na základě analýzy žákovských řešení lze konstatovat, že se zvýšil počet úspěšně řešených úloh v závislosti na experimentální výuce a došlo jak k nárůstu úspěšného užití heuristických strategií, tak k nárůstu úspěšnosti přímého způsobu řešení, zejména za použití grafické cesty.

3.4.3 Kultura řešení problému žákem

V předchozí kapitole jsem uváděl údaje týkající jednotlivých strategií souhrnně. Vzhledem k věkovým specifikům žáků uvádím výsledky po jednotlivých třídách.

Inteligence

Tabulka 3.8 uvádí výsledky měření inteligence.

Na základě manuálu k testu lze konstatovat, že třídy Hanky a Jirky jsou nad průměrem, třídy Milana a Aleny jsou průměrné.

třída	minimální	maximální	průměr
Hanky	100	145	129
Milana	90	125	106
Jirky	109	141	121
Aleny	79	113	98

Tabulka 3.8: Hodnoty získané pomocí VIT

Analýza testů ukázala následující korelaci mezi VIT a užitím heuristických strategií žáky výzkumného vzorku. Strategie An a KaZ byly užity žáky, jejichž index VIT byl alespoň 120. Toto zjištění koresponduje s vlastnostmi heuristických strategií.

Dovednost čtení s porozuměním

Tabulka 3.9 uvádí výsledky měření dovednosti čtení s porozuměním

třída	na začátku	na konci
Hanky	2,2	2,0
Milana	3,1	3,0
Jirky	3,1	2,8
Aleny	2,8	3,1

Tabulka 3.9: Průměrné hodnoty dovednosti čtení s porozuměním na začátku a konci výukového experimentu

Z tabulky 3.9 je zřejmé, že nejlepších výsledků ve čtení s porozumění dosahovala třída Hanky. Úroveň v ostatních třídách je srovnatelná. Ve třídách Hanky, Milana a Jirky je možné pozorovat mírné zlepšení této dovednosti, u třídy Aleny mírné zhoršení. Členové výzkumného týmu se domnívají, že změny v této dovednosti nelze připsat působení experimentální výuky a odpovídají přirozenému vývoji žáků.

Kreativita

Tabulka 3.10 ukazuje průměry naměřených hodnot kreativity na začátku a konci výukového experimentu.

Hodnoty v tabulce korespondují s věkem žáků v jednotlivých třídách. Ve třídě Hanky byli nejmladší žáci a ve třídě Jirky naopak nejstarší. Tato skutečnost odpovídá faktům, která se zmiňují v kognitivní psychologii, že jeden z faktorů kreativity je přímo úměrný intelektovým dovednostem respondenta, které se mění v závislosti na čase (tj. jeho věku).

Žáci všech tříd vykazují významný nárůst indexu kreativity. Psychologové, kteří spolupracovali na vyhodnocování výsledků výukového experimentu, tvrdí, že výše

třída	na začátku	na konci
Hanky	10	31
Milana	15	35
Jirky	20	44
Aleny	17	21

Tabulka 3.10: Průměry hodnot kreativity na začátku a konci výukového experimentu

uvedený nárůst indexu kreativity nelze přičíst pouze přirozenému zrání žáka, ale je pravděpodobné, že na jeho nárůstu se podílel i výukový experiment[10].

Analýza testů ukázala, že (konkrétní) žáci, u nichž vzrostla kreativita třikrát, často volili ve výstupním testu strategii ZPP.

3.4.4 Změny u žáků ve výkonu a v postojích při řešení úloh

Jako sekundární výsledek výzkumu byly zaznamenány změny v postojích žáků k řešení úloh a výuce matematiky obecně. Uváděné změny se objevily v rozhovorech s učiteli:

- vzrostla ochota žáků experimentovat;
- žáci věnují větší pozornost zpětnovazebným informacím, i sami ověřují výsledek;
- došlo k celkovému rozvoji komunikačních dovedností, zejména k dovednosti obhájit nebo vysvětlit postup řešení;
- zlepšila se dovednost zaznamenávat postup řešení;
- žáci přestali vzdávat řešení úlohy, pokud hned nevidí algoritmus řešení.

Jak poznamenali někteří učitelé, žáci změnili svůj postoj k řešení úloh, obávají se jich teď daleko méně.

Domnívám se, že nelze veškeré změny připsat působení výukového experimentu a jsou i výsledkem dalších faktorů, jako je přirozené zrání žáka, úspěšnost v jiných předmětech i mimoškolní aktivity žáka.

3.4.5 Vliv výukového experimentu na zúčastněné učitele

Následující změny se projevily u učitelů, kteří se podíleli na výukovém experimentu. Členové výzkumného týmu se domnívají, že tyto změny jsou sekundárním výsledkem tohoto experimentu. Změny byly zaznamenány na základě dlouhodobé spolupráce s učiteli a na základě analýzy pravidelných hlášení a na základě rozhovorů s učiteli:

- Hanka a Milan snížili svoje požadavky na žáky z hlediska striktního a korektního vyjadřování a zapisování ve prospěch pochopení řešení úlohy;
- Hanka a Jirka projevili více tolerance vůči různým žákovským řešením úlohy;

[10] Bližší popis a zdůvodnění je v (Eisenmann, Novotná, Přibyl a Břehovský, 2015).

- Jirka a Hanka se začali více zabývat myšlenkovými procesy žáků při řešení úloh;
- Alena začala do výuky matematiky zavádět i další způsoby vyučování, např. skupinové vyučování, práci s různými modely;
- všichni učitelé začali provádět analýzu úlohy z hlediska možného řešení některou z heuristických strategií.

3.5 Závěr

Základním cílem výukového experimentu bylo zodpovědět některé otázky a potvrdit, nebo vyvrátit dvě hypotézy.

Vstupní test na výzkumném vzorku ukázal, že některé strategie se objevují u žáků spontánně. Jedná se zejména o experimentální strategie (SE a POK) a strategii CZ. Domnívám se, že přestože výzkumný vzorek byl relativně malý, lze předpokládat, že tyto strategie mají potenciál ke spontánnímu výskytu i u dalších žáků. V případě strategie CZ tomu leckdy napomáhá podstata úlohy jako taková.

Na výzkumném vzorku se podařilo ukázat, že je možné některé heuristické strategie naučit žáky aktivně používat. Domnívám se, že se jedná o strategie SE, POK, CZ a ZPP. Tato zjištění korespondují s vlastnostmi strategií, vyjma strategie ZPP. Pro úspěšné zvládnutí strategie ZPP je zapotřebí i určitých zkušeností ze strany žáka. Domnívám se, že algoritmicky naučitelné strategie (viz kapitola 1.3.4, s. 39) je možné naučit i žáky mimo výzkumný vzorek. Tuto domněnku podporuje i kurikulární dokument (NCTM, 2000).

Také otázku: „Jak budou žáci úspěšní při řešení úloh na konci experimentu, budou-li používat heuristické strategie?“ se podařilo zodpovědět. Míra úspěšnosti vzrostla a já se domnívám, že se na tom podílel i výukový experiment. Nelze však jednoznačně toto zlepšení připsat pouze tomuto experimentu.

Měření ukázala, že došlo ke změnám v jednotlivých komponentách KRP, které byly testovány na začátku i na konci experimentu. Domnívám se, v závislosti na vyjádření psychologů, že jedinou položkou KRP, která se změnila v důsledku experimentu, je kreativita.

Výzkum také ukázal, že na vybraném vzorku žáků existují určité vazby jak mezi jednotlivými položkami KRP, tak mezi položkami KRP a užíváním heuristických strategií. Korelace byly nalezeny mezi inteligencí a strategiemi An a ZPP, mezi kreativitou a strategií ZPP a mezi inteligencí a DVSZ.

Na začátku experimentu byly formulovány následující hypotézy:

První hypotéza: Po proběhnutí experimentální výuky budou žáci schopni ve větší míře aktivně užívat heuristické strategie při řešení úloh.

Tato hypotéza byla potvrzena nejen výstupním testem, ale i provedeným retenčním testem, který proběhl ve třídě Jirky s odstupem osmi měsíců. Ve výstupním testu byla úspěšnost 76 %, v retenčním testu pak 81 %. V retenčním testu se také objevilo větší zastoupení heuristických strategií[11].

[11] Více viz (Doulík, Eisenmann, Přibyl, Škoda, in print).

Druhá hypotéza: Po skončení experimentální výuky budou mít žáci lepší výsledky ve všech komponentách KRP (vyjma inteligence).

Na základě výsledků se tato hypotéza nepotvrdila. V případě třídy Aleny došlo ke zhoršení dovednosti čtení s porozuměním, v případě třídy Jirky došlo ke zhoršení dovednosti využívat stávajících znalostí v matematice. Některé položky KRP se nezměnily.

Kapitola 4

Experiment zaměřený na strategii UFP

Někdy je nutné jít po nesprávné cestě,
abychom se mohli správně a rychle vrátit.

Edward Franklin Albee

Na rozdíl od krátkodobých experimentů i dlouhodobého experimentu, byl tento zaměřen na jednu jedinou strategii. Strategie UFP vstoupila do našeho výzkumu až později a proto nebylo možné ji zařadit do dlouhodobého experimentu. Vzhledem k tomu, že krátkodobé experimenty předcházely dlouhodobému a měly jiný charakter, neřadím provedený experiment ani mezi krátkodobé experimenty. Oproti výše zmíněným experimentům tento také sledoval jiné cíle a zaměřil se na jiné hypotézy.[1]

4.1 Cíle experimentu

Rovnice se v českých základních školách obvykle zavádějí v osmém ročníku (čtrnáctiletí žáci). Po zavedení lineárních rovnic jsou vysvětleny úpravy rovnic a žáci se naučí rovnice řešit. Obvykle se k tomu používá model vah, v poslední době ilustrovaný i pomocí animací na počítači (Bruder a Weiskirch, 2007). Poté přichází na řadu řešení slovních úloh pomocí rovnic. Největším problémem při řešení takové úlohy obvykle bývá sestavení příslušné rovnice. Následující výzkumné hypotézy se vztahují k této problematice.

Hypotéza 1: Užití strategie UFP při řešení úloh je vhodná propedeutika rovnicového aparátu. Přesněji řečeno: Zvládnou-li žáci ještě před zavedením rovnic řešit jednoduché úlohy pomocí strategie UFP, budou později při řešení slovních úloh úspěšnější při sestavování příslušných rovnic.

Hypotéza 2: Strategie UFP je vhodná alternativa pro řešení slovních úloh těmi žáky, kteří nejsou schopni spolehlivě sestavovat rovnice.

[1] Popis a výsledky experimentu jsou popsány v (Eisenmann, Novotná a Přibyl), který prochází recenzním řízením v časopise JMD.

4.2 Metodika a realizace výzkumu

4.2.1 Příprava experimentu

Členové výzkumného týmu sestavili skupinu 10 úloh, pomocí nichž budou žáci učeni používání heuristické strategie UFP. Skupina úloh je koncipována tak, aby náročnost těchto úloh postupně vzrůstala. Všechny úlohy jsme ověřili v roce 2013, v celkem pěti osmých třídách různých základních škol v Ústeckém kraji a v Praze. Předvýzkumu se zúčastnilo celkem 124 žáků. Úlohy jsme odladili ve spolupráci s učiteli těchto žáků.

Dále jsme v průběhu roku 2013 na celkem pěti seminářích s učiteli v různých městech České republiky probrali naše představy o prezentaci strategie UFP ve škole a seznámili se s jejich názory a odhady výsledků připravovaného experimentu. Celkem jsme diskutovali se zhruba 70 učiteli matematiky základních škol a gymnázií.

4.2.2 Realizace experimentu

Pro samotný experiment jsme vybrali 3 učitele z těch, kteří s námi v průběhu příprav spolupracovali. Všichni tito učitelé plánovali zavádět v roce 2014 se svými žáky lineární rovnice. Výběr učitelů byl velmi náročný. Potřebovali jsme, aby učitel mohl vést výuku současně ve dvou paralelních třídách. Tyto třídy navíc musely být z hlediska výkonnosti žáků v matematice srovnatelné. Co se samotných učitelů týče, jednalo se o dva muže a jednu ženu. Délka jejich praxe byla 8, 10 a 20 let. Jejich styl výuky by se dal obecně označit za konstruktivistický.

Samotná výuka pak probíhala takto: V experimentální třídě učitel začal téma Rovnice tím, že ještě před samotným zavedením rovnic naučil své žáky strategii UFP. K tomu využil výše zmíněnou skupinu deseti připravených úloh, které s žáky objevitelským způsobem postupně vyřešil. Výsledkem této etapy bylo, že minimálně polovina žáků třídy zvládla pomocí strategie UFP řešit dané úlohy. Tato výuka zabrala učiteli celkem tři vyučovací hodiny. V kontrolní třídě učitel tuto propedeutickou etapu nezařadil.

Poté se v obou třídách, experimentální i kontrolní, žáci naučili řešit lineární rovnice. Po jejich zvládnutí se učili řešit pomocí nich slovní úlohy. Tyto dvě etapy trvaly ve všech třídách celkem pět týdnů.

Na konci celého tématu napsali žáci všech šesti tříd stejný test obsahující čtyři následující úlohy. Mezi začátkem experimentální výuky a napsáním tohoto testu uplynuly dva měsíce.

1. Třetina neznámého celého čísla zmenšená o 20 % je číslo 32. O jaké číslo se jedná?

2. Obvod obdélníku je 56 m. Určete délky jeho stran, víte-li, že jsou v poměru 7:3.

3. Pan Zajíc je úspěšným chovatelem králíků. Po třech letech chovu se nyní stará o 45 králíků. Chov rozšiřoval tak, že k chovnému počtu přidal na konci každého roku jeho dvojnásobek. Kolik králíků měl pan Zajíc na konci prvního roku?

4. Televizor byl zdražen o čtvrtinu. Protože se neprodával, byl zlevněn o polovinu z upravené ceny. Poté stál 10 000 Kč. Kolik stál televizor původně?

Úlohy č. 1 a 4 jsou modifikované úlohy, lišící se od úloh, na kterých se žáci experimentálních tříd učili užívat strategii UFP, pouze číselnými parametry. Zde jsme očekávali, že hodně žáků použije při řešení těchto úloh UFP. Úloha č. 3 se od podobné, žáky probírané úlohy, liší číselnými parametry, kontextem a počtem opakování děje. Zde jsme očekávali, že žáci budou málo úspěšní. Stejné očekávání jsme měli i u úlohy č. 2, která není podobná žádné probírané úloze.

4.2.3 Výzkumný vzorek

Celkem se jednalo o tři dvojice osmých tříd tří základních škol ve třech městech v České republice. Jedna dvojice tříd byla průměrná (24 + 27 žáků), jedna mírně nadprůměrná (22 + 25 žáků) a jedna podprůměrná (26 + 23 žáků). Toto hodnocení tříd jsme společně udělali na schůzce se všemi třemi učiteli, na základě jejich vzájemného porovnání schopností dětí a jejich školního prospěchu. Celkem se tedy experimentu zúčastnilo 147 žáků. 72 z nich prošlo v experimentálních třídách výukou obohacenou o strategii UFP, ostatních 75 žáků bylo ve třídách kontrolních.

4.3 Výsledky a diskuse

4.3.1 Výstupní test

Obecně lze po analýze písemných žákovských řešení žáků všech tříd konstatovat následující skutečnosti. Kvantitativní údaje se týkají, není-li řečeno jinak, všech písemných řešení dohromady.

- Celkem se vyskytly následující čtyři způsoby řešení úloh:
  - přímý způsob – použití rovnic (algebraická cesta);
  - přímý způsob (grafická cesta – ilustrativní obrázek a následně aritmetická cesta) – především u druhé úlohy;
  - užití strategie CZ;
  - užití strategie UFP.
- Ve dvou třetinách případů se žáci pokusili řešit úlohy pomocí rovnic. Výjimku tvoří úloha č. 2, kde se o řešení pomocí rovnic pokusila jen polovina žáků.
- Pokud se žáci rozhodli řešit úlohy pomocí rovnic a byli neúspěšní, tak proto, že nesestavili správně příslušnou rovnici. Těchto žáků byla v experimentálních třídách pouze třetina, v kontrolních třídách naopak dvakrát tolik.
- Pokud žáci příslušnou rovnici správně sestavili, vyřešili ji až na malé výjimky správně.
- Někteří žáci řešili úlohy č. 1, 3 a 4 užitím heuristické strategie CZ. Jednalo se o třetinu žáků v nadprůměrných třídách a o 22 % žáků ve třídách průměrných a podprůměrných. Úspěšní byli tito žáci zhruba v polovině případů, v nadprůměrných třídách téměř všichni.

- Při řešení úloh č. 1, 3 a 4 použila čtvrtina žáků experimentálních tříd UFP. Tři čtvrtiny žáků, kteří ji k řešení těchto úloh použili, vyřešili úlohu správně.
- Nejméně žáků vyřešilo v souladu s naším očekáváním úspěšně úlohu č. 3. Roli zde sehrává i komplikovanější zadání.
- Oproti našemu očekávání byli žáci experimentálních tříd relativně úspěšní při řešení úlohy č. 2 (v experimentálních třídách ji úspěšně vyřešilo celkem 42 % žáků, v kontrolních jen 23 %). Použili k tomu UFP. Uvádím stručný zápis žákovských řešení, které vesměs mělo tuto podobu: Víme, že má platit $a + b = 28$. Abychom zachovali požadovaný poměr 7:3, zvolme za a číslo 7 a za b číslo 3. Potom bude $a + b = 10$. To je málo. Musíme tedy délky obou stran zvětšit. Kolikrát? 2,8 krát.

Následující tabulka uvádí úspěšnost žáků jednotlivých tříd v procentech. Číslo udává, jaká část ze všech úloh byla celkem v dané třídě úspěšně vyřešena. Správně vyřešenou úlohou se rozumí ta, kde je uvedeno smysluplné řešení úlohy a správná slovní odpověď.

skupina	nadprůměrná třída	průměrná třída	podprůměrná třída
experimentální	82	69	46
kontrolní	73	42	29

Tabulka 4.1: Úspěšnost žáků jednotlivých tříd (v %)

Úspěšnost žáků experimentálních tříd je ve všech případech vyšší, než je tomu u tříd kontrolních. Nejmenší je tento rozdíl u tříd s nadprůměrnými žáky. To je přirozené. Členové výzkumného týmu se domnívají, že důvody jsou dva: Za prvé mají nadaní žáci relativně malé potíže se sestavováním rovnic. D. A. Hinsley, J. R. Hayes a H. A. Simon (1977) uvádějí základní aspekty matematizace slovní úlohy a výzkum A. Heinze (2005) ukazuje, že nadaní žáci dokáží rychleji a jistěji pochopit vstupní údaje v úloze, lépe je strukturují, mají vhled do úlohy a v neposlední řadě formulují odpovědi „lepší kvality“ (s. 182). Za druhé je zde větší podíl žáků, kteří řešili úlohy užitím heuristické strategie CZ.

Hodnocení učitelů

Kromě analýzy testů žáků jsme při ověřování našich hypotéz vycházeli z rozhovorů se všemi třemi učiteli. Tyto rozhovory jsme s učiteli vedli během celého experimentu, bezprostředně po jeho skončení, a poté ještě s odstupem dvou měsíců. Všichni učitelé se shodli na tomto poznatku:

Žáci experimentální třídy měli menší problémy se sestavováním rovnic u slovních úloh než žáci třídy kontrolní. Podstatný je podle učitelů následující moment při probírání heuristické strategie UFP: Jde o to, aby si žáci uvědomili, že volba odhadu (falešného předpokladu) nemá na výsledek úlohy vliv, že „to vždycky vyjde stejně“.

Učitel nechal žáky volit odhad zcela svobodně. Někteří žáci jej volili 5, jiní 1, další 20. Podstatné bylo, že každá skupinka dětí pak ukázala ostatním, jak postupovala.

Skutečnost, že „to vždycky vyjde stejně“, tedy že nezáleží na volbě odhadu, je stěžejním propedeutickým prvkem. Uvědomění si tohoto faktu později navozuje lepší pochopení proměnné, kterou do řešení úlohy zavedeme, abychom mohli úlohu vyřešit pomocí rovnice. O této roli čísel jako stavebních kamenů pro vybudování neznámé hovoří (Fischer, 2009, s. 26).

Dále se učitelé vyjádřili ke druhé hypotéze, tedy k možnosti strategie UFP jako alternativy pro řešení slovních úloh těmi žáky, kteří nejsou schopni spolehlivě sestavovat rovnice. I zde se učitelé v podstatě shodli. Uvádíme doslovně jejich výroky:

- „Je to dobrá metoda pro ty, kteří velmi špatně pracují s proměnnými. Ti pak i velmi obtížně sestavují rovnice.“
- „Možnost volby řešení je důležitá pro slabší žáky, kteří mají potíže jak se sestavováním rovnic, tak jejich řešením.“
- „Je to dobré, zvlášť pro slabší žáky – ti inklinují k algoritmům.“

Kromě stanovisek k našim dvěma výzkumným hypotézám učitelé ještě přidali tyto postřehy:

- Je to další praktické využití poměru – mimo např. tradiční mapy a úlohy o rozdělení úsečky.
- Je to velice vhodné na trénink odhadu.

Učitel nadprůměrných tříd ale v posledním interview (dva měsíce po skončení experimentu) zdůraznil, že jeho žáci většinou řešení slovních úloh pomocí rovnic zvládli a již nyní nechtějí, s odstupem času, slovní úlohy pomocí strategie UFP řešit. A to přesto, že právě tito žáci více než žáci ostatních tříd strategii UFP ve výstupním testu použili. Učitelé ostatních tříd uvedli, že někteří žáci strategii UFP používají při řešení slovních úloh stále, jako první volbu. V každé ze dvou tříd (průměrné i podprůměrné) jde prý zhruba o 4 žáky.

4.4 Závěr

Popsaný experiment potvrdil u zkoumaných žáků platnost první hypotézy, že užití strategie UFP je vhodná propedeutika zavádění rovnic. Zvládnou-li žáci ještě před zavedením rovnic řešit jednoduché úlohy pomocí strategie UFP, budou později při řešení slovních úloh úspěšnější při sestavování příslušných rovnic. Klíčovým krokem je při probírání UFP poznání žáků, že na volbě odhadu (falešného předpokladu) nezáleží. Uvědomění si tohoto faktu navozuje lepší pochopení proměnné, kterou do řešení úlohy zavedeme, abychom mohli úlohu vyřešit pomocí rovnice.

Druhá hypotéza, že strategie UFP je užitečná jako alternativa pro řešení slovních úloh těmi žáky, kteří nejsou schopni spolehlivě sestavovat rovnice, se potvrdila u zkoumaných žáků jen částečně. Učitelé ji oceňují jako alternativu u těch žáků, kteří mají tendenci naučit se algoritmům řešení problémů. A jen někteří z nich byli schopni tuto heuristickou strategii s odstupem při řešení úloh použít.

Kapitola 5

Závěry

> Vědec, který nikdy nešel nesprávnou cestou, je pravděpodobně přespříliš opatrný na svou pověst. Nelze se jenom vyhýbat chybám, zvláště ne na počátku práce, kdy jde především o přístup k řešení problémů.
>
> Norbert Wiener

Mou snahou, které podřizuji většinu svého konání, je zlepšit dovednost žáků řešit matematické úlohy, ukázat, jak nalézat v jejich řešení radost, a pozměnit náhled společnosti, že matematika (a řešení úloh) je doménou několika nadaných jedinců. Pevně věřím, že touto prací jsem přispěl alespoň k částečnému dosažení vytyčeného cíle.

V závěrečné kapitole shrnuji dosažené výsledky a odkazuji na místa v práci, kde o nich podrobně pojednávám. Nejprve uvádím výsledky, které se dotýkají teoretické oblasti, poté se věnuji výsledkům, kterých bylo dosaženo experimentální činností. Výsledky jsou zpracovány poněkud nezvyklým způsobem – nevyčleňuji je z textu, a nechávám je zapadat na místa v textu tak, aby tvořila s ostatními částmi textu jednotný celek.

Řada jednotlivých výsledků, které jsou v práci uvedeny, byla již publikována. Tyto publikace jsou jednak zmiňovány v jednotlivých kapitolách, jednak je jejich seznam uveden v kapitole Literatura (s. 117) – části Autocitace.

5.1 Plnění cílů z teoretické oblasti

Ve své práci jsem vyšel z vymezení heuristických strategií zavedených G. Pólyou a převzatých J. Kopkou. Tato vymezení byla v rámci řešení již zmíněného grantového projektu rozpracována, upřesněna a posléze nahrazena novou terminologií. Na všech částech jsem se jako člen výzkumného týmu výraznou měrou podílel.

5.1.1 Klasifikace užití heuristické strategie

Kapitola 1.3 (str. 31) pojednává o prvním teoretickém výstupu mé práce. Na základě motivace řešitele členové týmu zavedli pojem *angažovanost řešitele k řešení úlohy* a rozdělili řešení úloh do tří základních typů – pokus, přímý způsob a užití heuristické strategie. Sledováním žáků při řešení úloh a následným rozborem žákovských řešení jsem navrhl a rozpracoval trojrozměrnou klasifikaci užití heuristické strategie. Podstatou je oddělení jednotlivých aspektů řešení úlohy od sebe (řešení, způsob řešení a prostředek řešení)[1]. Zavedením této klasifikace a jejím používáním se členové řešitelského týmu výrazně odlišili od obvyklého používání heuristických strategií v pólyovském duchu.

5.1.2 Vlastnosti strategií

Podkapitola 1.3.4 (s. 39) představuje druhý teoretický výstup mé práce. Systematickou rešeršní činností, analýzou žákovských řešení i vlastním aktivním užíváním heuristických strategií při řešení úloh jsem dospěl k názoru, že ne každá strategie je snadno naučitelná žákem, že strategie je možno seskupovat podle určitých kritérií a že řada strategií má určité rysy shodné. Na základě uvedených zjištění jsem specifikoval určité rysy strategií, které se dotýkají jak vztahu strategie – žák (řešitel), tak vnitřní struktury strategie. Tyto rysy jsem nazval *vlastnostmi strategií* a tyto vlastnosti se vyprofilovaly do následujících pěti: množství nutných znalostí, množství nutných zkušeností, možnost naučit (se) strategii opakováním, riziko nesprávného použití a úspěšnost použití strategie. U každé vlastnosti byla nejprve odhadnuta její hodnota (na škále 1–5), která se dále zpřesňovala v závislosti na získaných datech.

Dva výše uvedené výstupy lze považovat za splnění následujícího cíle:

> Charakterizovat jednotlivé heuristické strategie řešení úloh z různých úhlů pohledu, zejména popsat sledované vlastnosti strategií (vnitřní hledisko klasifikace) a jejich užití (vnější hledisko klasifikace).

Částečně tím byl také splněn následující cíl:

> Sjednotit vymezení jednotlivých heuristických strategií řešení úloh z hlediska teoretických východisek, terminologie a sledovaných charakteristik.

5.1.3 Vymezení heuristických strategií

Kapitola 1.4 (s. 44) podává přehled heuristických strategií tak, jak jej vnímají členové výzkumného týmu. Nemohu se označit za jediného autora koncepce předkládaného rozdělení a vymezení, neboť toto rozdělení se v průběhu řešení projektu měnilo, bylo neustále precizováno, a to až do nynější podoby. Na těchto změnách se podíleli všichni členové týmu včetně mne a některá vymezení jsou má vlastní, nelze však jednoznačně určit která.

Zpracováním přehledu strategií, který uvádím ve své práci, a vytvořením nástrojů pro možnou klasifikaci strategií, které v práci nejsou zmíněny (další strategie zmiňované G. Pólyou, A. H. Schoenfeldem a dalšími), byl splněn cíl:

> Sjednotit vymezení jednotlivých heuristických strategií řešení úloh z hlediska teoretických východisek, terminologie a sledovaných charakteristik.

[1] Popsáno v kapitolách 1.3.1–1.3.3.

5.1.4 Vymezení pojmu úloha

Poměrně rozsáhlá kapitola 1.1 (s. 10) je věnována pojmu úloha a shrnuje vymezení tohoto pojmu nejen pro potřeby práce, ale i pro potřeby řešení projektu. Do řešení projektu se promítla výrazně menší část sledované problematiky, přesto však stála například v základech vymezení strategií Konkretizace a zobecnění (KaZ) a Zobecnění a konkretizace (ZaK) a dalších. Přínosem je uvědomění si skutečnosti, že úloha si nese celou řadu atributů, z nichž jedním z nejdůležitějších je role, kterou hraje ve vzdělávacím procesu.

Kapitola 1.1 je naplněním cíle:

> Vymezit pojem úloha v kontextu užití heuristických strategií řešení úloh a provést syntézu různých přístupů vzhledem ke zkoumané problematice.

5.2 Plnění cílů z experimentální oblasti

Cíle realizované v rámci experimentální činnosti se do velké míry překrývají s cíli projektu. Pro možnost sledovat tyto cíle (specifikovány v kapitole 3.1) byl vytvořen nástroj nazvaný *kultura řešení problému žákem* (KRP).

Tento nástroj, který je popsán v podkapitole 3.2.1 (s. 90), vyvinuli členové řešitelského týmu za účelem poznání žákových schopností a dovedností ve vztahu k řešení úloh. Tento nástroj sleduje následující položky: inteligenci, dovednost číst text s porozuměním, kreativitu a dovednost využít stávajících znalostí v matematice.

Kapitola 3.2.1 (s. 90) dokládá splnění cíle:

> Najít či vytvořit nástroj, který by umožnil popsat žákovu dovednost řešit úlohy.

5.3 Výzkumné otázky a hypotézy

Následující otázky a hypotézy se do značné míry překrývají s výzkumnými otázkami a hypotézami stanovenými buď pro krátkodobé experimenty, nebo pro dlouhodobý experiment. Protože jsem se nemalou měrou podílel na jejich zodpovězení a protože odpovědi tvoří východiska pro dosažení posledního cíle, uvádím je ve své práci.

Odpovědi na jednotlivé otázky je nutno vnímat v kontextu provedených experimentů. Vždy je třeba mít na mysli, že se jedná o „částečné“ odpovědi, přičemž slovem „částečné“ chci poukázat na skutečnost, že to, co se podařilo prokázat na vybraném vzorku žáků, nelze považovat za obecně platné pravidlo.

5.3.1 Naučitelnost strategií

Existují heuristické strategie, které jsou naučitelné v krátkém časovém úseku (cca 3 měsíců)?

Na základě provedených krátkodobých experimentů se domnívám, že lze kladně zodpovědět tuto otázku. Ano, existují heuristické strategie, které jsou naučitelné v krátkém časovém úseku. Jedná se zejména o experimentální strategie Pokus – ověření

– korekce (POK) a Systematické experimentování (SE) a strategii Cesta zpět (CZ), u které to obvykle umožňuje charakter úlohy.

5.3.2 Vhodnost strategií pro žáky

Existují heuristické strategie, které jsou vhodné pro běžného žáka, tj. žáka, který se nezúčastňuje matematických soutěží, a umožní mu řešit širší škálu úloh?

Na základě provedených experimentů (krátkodobých, dlouhodobého i zaměřeného na strategii Užití falešného předpokladu (UFP)) se domnívám, že lze kladně odpovědět na tuto otázku. Ano, experimentální strategie POK a SE jsou vhodné pro běžného žáka, zejména prvně zmiňovaná vzhledem ke své podstatě. O strategii UFP, která svou povahou také spadá mezi experimentální, lze předpokládat, že může být vhodnou propedeutikou zavádění rovnic. Mimo to ji lze užít k řešení úloh, které vedou na lineární rovnici a její zvládnutí umožní žákovi řešit úlohy ještě před tím, než se s rovnicemi ve výuce setká. Strategie KaZ a Analogie (An) můžou umožnit žákovi (řešiteli) získat vhled do dané úlohy a dopomoci mu tak k jejímu správnému vyřešení.

5.3.3 Strategie neuplatitelné ve výuce na ZŠ

Existují heuristické strategie, které není možné zařadit do běžné výuky matematiky na základní škole?

Na základě provedených experimentů se domnívám, že nelze zodpovědět tuto otázku kladně ani záporně. Provedené experimenty dokazují, že existují strategie, u kterých bylo obtížné zajistit, aby je žáci aktivně používali, přesto se obvykle najde žák, který ji vhodným způsobem použije. Jedná se především o specifické strategie, ale i mezi obecnými strategiemi lze takové najít. Ze strategií zmiňovaných v této práci jde o Přeformulování úlohy (PU) a ZaK. Domnívám se, že tyto strategie je obtížné zařadit do výuky matematiky v širším měřítku.

5.3.4 Spontánní užití strategií žáky

Existují heuristické strategie, které žáci objevují přirozeně?

Odpověď na tuto otázku byla získána analýzou vstupních testů dlouhodobého experimentu. Strategie POK, SE a CZ se objevily ještě před samotnou experimentální výukou. Domnívám se, že je tomu tak ze tří důvodů:

- Užití strategie CZ představuje v některých úlohách nejefektivnější způsob řešení a v řadě případů formulace zadání úlohy přímo evokuje užití strategie CZ.
- Druhým důvodem je dlouhodobé působení učitele. Některý učitel v žákově historii mohl přistupovat k řešení úloh experimentálním způsobem a žáky mohl motivovat k provádění pokusů, pokud si nejsou jisti, jak mají úlohu řešit.
- Tyto tři strategie mají i reálný předobraz v praktickém životě. Je zřejmé, že člověk v „problémové situaci“ hledá způsoby, jak tuto situaci vyřešit. Z vlastní zkušenosti vím, že malé dítě experimentuje s různými nástroji, než najde ten správný.

5.3.5 Úspěšné užití strategií žáky

Jak budou žáci úspěšní při řešení úloh, použijí-li heuristické strategie?

Odpověď na tuto otázku podává kapitola 3.5 (str. 102). Míra úspěšnosti vzrostla, proto se domnívám, že se na tom podílel i výukový experiment. Nelze však jednoznačně toto zlepšení připsat pouze tomuto experimentu. Vliv na úspěšnost může mít celá řada dalších faktorů, např. přirozené zrání žáka, působení dalších učitelů, mimoškolní aktivity apod.

5.3.6 Změna kultury řešení problému žákem

Změní se některé položky KRP u žáků v závislosti na účasti v experimentu?

Odpověď na tuto otázku je také uvedena v kapitole 3.5. Měření ukázala, že došlo ke změnám v jednotlivých komponentách KRP, které byly testovány na začátku i na konci experimentu (inteligence nebyla na konci testována). Domnívám se, v závislosti na vyjádření psychologů, že jedinou položkou KRP, která se změnila v důsledku experimentu, je kreativita.

Výzkum také ukázal, že na vybraném vzorku žáků existují určité vazby jak mezi jednotlivými položkami KRP, tak mezi KRP a užíváním heuristických strategií. Korelace byly nalezeny mezi inteligencí a An a inteligencí a Zavedením pomocného prvku (ZPP) a mezi kreativitou a ZPP. Dále existuje korelace mezi dvěma položkami KRP a to mezi inteligencí a dovedností využívat stávající znalosti.

5.3.7 Potvrzení hypotézy 1

Hypotéza 1: Po proběhnutí dlouhodobého experimentu budou žáci schopni ve větší míře aktivně užívat heuristické strategie při řešení úloh.

Tato hypotéza byla potvrzena nejen výstupním testem, ale i provedeným retenčním testem, který byl zadán ve třídě Jirky s odstupem osmi měsíců. Ve výstupním testu byla úspěšnost 76 %, v retenčním testu pak 81 %. V retenčním testu se také objevilo větší zastoupení heuristických strategií.

5.3.8 Nepotvrzení hypotézy 2

Hypotéza 2: Po proběhnutí dlouhodobého experimentu budou mít žáci lepší výsledky ve všech komponentách KRP (vyjma inteligence).

Na základě výsledků je možné konstatovat, že tato hypotéza se nepotvrdila. V případě třídy Aleny došlo ke zhoršení dovednosti čtení s porozuměním, v případě třídy Jiřího došlo ke zhoršení dovednosti využívat stávajících znalostí v matematice. Některé položky KRP se nezměnily.

5.4 Implementace heuristických strategií do výuky

Zhodnocení implementace heuristických strategií do výuky z hlediska kultury řešení problému žákem

Závěrem si dovolím konstatovat, že považuji zavádění heuristických strategií do výuky matematiky na základní, potažmo střední škole za smysluplné. Rozšiřování repertoáru strategií řešení úloh umožňuje žákům řešit větší množství úloh a zlepšování dovednosti užívat heuristické strategie umožňuje žákům nevzdávat řešení úlohy, když není na první pohled zřejmý algoritmický způsob.

Provedené experimenty ukázaly, že vyšší angažovanost žáka k řešení úlohy vede k většímu zájmu o úlohu jako takovou, neboť tito žáci obvykle požadovali jak další informace o úlohách, tak i zpětnou informaci o svém řešení, přestože tato neměla žádný vliv na školní prospěch.

Protože řešení úloh stojí ve středu základoškolské a středoškolské výuky matematiky, domnívám se, že změna postoje k řešení úloh se pozitivně projeví i na postoji k matematice jako takové. Právě možnost plně prožít pozitivní emoci při vyřešení úlohy je vhodným motivačním faktorem, který může ovlivňovat postoje k matematice.

5.5 Náměty na další výzkum

Již během zpracovávání jak teoretické, tak experimentální části práce, jsem si byl vědom, že existují určité oblasti výzkumu, které byly opomenuty, obvykle z důvodu zavedení nových proměnných do výzkumu. Následně uvádím pět oblastí, kde jsem si vědom, že lze plynule navázat na již existující výzkum.

5.5.1 Řešení úloh a různé typologie žáka

Z hlediska školní praxe existuje více typologií žáka. V určité fázi experimentu jsem se zabýval možností zkoumat vztah typu osobnosti žáka (Miková a Stang, 2010) a přístupu žáka k úloze a úspěšností žáka při řešení úloh. Vzhledem k tomu, že výzkum vztahů značně překračoval možnosti, které přinášelo řešení projektu, daným výzkumem jsem se přestal aktivně zabývat. Domnívám se, že výsledky tohoto výzkumu by mohly pomoci učiteli v přístupu k žákovi při řešení úloh a to nejen z hlediska obtížnosti úloh – někdo má rád „výzvy“, naopak jiný žák může upřednostňovat jednodušší úlohy, jejichž řešení ho uspokojuje, ale i z hlediska další učitelovi spolupráce se žákem.

Dále by bylo přínosné rozpracovat vytvořenou strukturu KRP jako nástroj pro provedení typologie žáků z hlediska řešení úloh.

5.5.2 Další strategie řešení úloh

Je zřejmé, že strategie řešení úloh je možné rozdělit do dvou základních směrů. Prvním směrem jsou obecné strategie a druhým směrem pak specifické strategie. Celkově lze říci, že sledovaná problematika může být nahlížena třemi základními úhly pohledu –

z pohledu matematika, psychologa a didaktika, přičemž každý z nich upřednostňuje jiné atributy nejen úlohy, ale i procesu řešení úlohy a také žáka.

Další výzkum by mohl rozšířit jak skupinu specifických strategií, tak i skupinu obecných strategií. Obecné heuristické strategie řešení úloh lze rozšiřovat nejen studiem literatury matematiky, ale zkoumáním metod řešení problémů v psychologii. Oproti tomu, specifické heuristické strategie řešení úloh mají svůj předobraz v matematice.

5.5.3 Prostředky užití heuristických strategií

V této práci se nepodařilo ve větší míře se zabývat různými prostředky užití heuristických strategií. Jak *informačně komunikační technologie*, tak *výpočetní technika* sama o sobě, mají v naší společnosti nezastupitelné místo. Řada výzkumů již delší dobu sleduje vliv zmíněných prostředků na výuku matematiky a soudobá didaktika by měla určitým způsobem reflektovat změny ve společnosti, které tyto prostředky přinášejí. Protože výpočetní technika umožňuje provádět řadu výpočtů v reálném čase, lze předpokládat, že komplexnější úlohy by mohly být zařazovány již do výuky matematiky v nižších ročnících, než to bylo obvyklé před 20 lety. Daleko větší důraz by pak byl kladen na modelování (ve smyslu vytváření matematického popisu situace) než na samotný výpočet. Toto koresponduje s dlouhodobými změnami, které přetvářejí znalostní společnost na společnost informační.

5.5.4 Matematické úlohy a reálné problémy

Domnívám se, že velmi zajímavou oblastí dalšího výzkumu je vztah úspěšnosti řešení matematických úloh a reálných problémů. Reálné problémy na rozdíl od matematických úloh můžeme rozdělit na praktické (tj. vyžadující manuální zručnost) a teoretické, přičemž se domnívám, že existuje vztah mezi řešením určitého typu úloh a teoretickými problémy. Dle mého názoru je spojujícím prvkem kreativita.

Na druhou stranu jsou známy případy matematiků, kteří v reálném životě (a je jedno o jaký typ reálného problému se jedná) selhávají – jmenujme např. Davida Hilberta, Pál Edröse, Norberta Wienera či Kurta Gödela. Je tedy zřejmé, že pouhá kreativita není postačující podmínkou pro úspěšné řešení reálných problémů.

5.5.5 Rozvoj vlastností strategií

V této práci je představena teorie vlastností strategií. Domnívám se, že strukturu uvedených pěti vlastností je možné rozšířit o další vlastnosti. Atributy *množství nutných znalostí* a *množství nutných zkušeností* se z dlouhodobého hlediska ukazují jako příliš obecné. Minimálně lze obsah obou vlastností zjemnit na znalosti (zkušenosti) z matematiky a z oblastí mimo matematiku, přičemž kritériem by byla náplň školního předmětu matematika odpovídající věku žáka.

Zcela novou vlastností by mohla být *obecnost/specifičnost* strategie, která by popisovala míru obecnosti strategie. Na jednom konci stojí obecné principy řešení problémů

– např. experimentování – na druhém konci specifické strategie, které je možné použít pouze u jednoho konkrétního typu úloh – např. Dirichletův princip.

Výzkum, který by byl zaměřený právě na vlastnosti strategií, by také mohl přinést zpřesnění hodnot přisuzovaných jednotlivým strategiím.

Literatura

S pomocí knih se mnozí stávají učenými i mimo školu. Bez knih pak nebývá učený nikdo ani ve škole.

Jan Amos Komenský

Přehled použité literatury je rozdělen do tří částí. V první části – Autocitace – uvádím přehled prací, na kterých jsem se autorsky podílel a které jsou v textu citována. Ve druhé části – Reference – je uveden přehled prací, které ve svém díle cituji, a ve třetí části – Bibliografie – uvádím ta díla, se kterými jsem se seznámil, ale v textu je přímo necituji. To však neznamená, že mne určitým způsobem neovlivnila.

Autocitace

BŘEHOVSKÝ, Jiří, Jiří PŘIBYL, Petr EISENMANN, Jan KOPKA a Jiřina ONDRUŠOVÁ. Dropping a Part of the Condition – an Effective Heuristic Strategy. In: CÍRUS, L. ed. *Usta ad Albim: BOHEMICA*. Ústí nad Labem: Univerzita J. E. Purkyně v Ústí nad Labem, 2013, s. 18–23.

DOULÍK, Pavel, Petr EISENMANN, Jiří PŘIBYL a Jiří ŠKODA. Unconventional Ways of Solving Problems in Mathematics Classes. *The New Educational Review*, in print.

EISENMANN, Petr, Jan KOPKA, Jiřina ONDRUŠOVÁ a Jiří PŘIBYL. The Strategy of Reformulation of a Problem. In: BILLICH, M., ed. *Mathematica IV: Scientific Issues*. Ružomberok: Katolická univerzita v Ružomberku, 2012, s. 31–36.

EISENMANN, Petr, Jarmila NOVOTNÁ a Jiří PŘIBYL. The heuristic strategy Introduction of an auxiliary element. In: SZARKOVÁ, D., D. RICHTÁRIKOVÁ a Ľ. BALKO, eds. *Proceedings of 14th Conference on Applied Mathematics Aplimat 2015.* Bratislava: Slovak University of Technology in Bratislava, 2015, s. 232–245.

EISENMANN, Petr, Jarmila NOVOTNÁ a Jiří PŘIBYL. *Use of false assumption.* (Článek byl zaslán do časopisu Journal für Mathematik-Didaktik.)

EISENMANN, Petr, Jarmila NOVOTNÁ, Jiří PŘIBYL a Jiří BŘEHOVSKÝ. The development of a culture of problem solving with secondary students through heuristic strategies. *Mathematics Education Research Journal*, 2015, **27**(4), 535–562.

EISENMANN, Petr a Jiří PŘIBYL. Systematické experimentování ve výuce matematiky. In: HAŠEK, R., ed. *Sborník příspěvků 6. konference Užití počítačů ve výuce matematiky.* České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2013, s. 85–93.

EISENMANN, Petr a Jiří PŘIBYL. Analogie – užitečná heuristická strategie. *Učitel matematiky*, in print.

EISENMANN, Petr, Jiří PŘIBYL a Jarmila NOVOTNÁ. Tvořivě při řešení úloh ve školské matematice. In: VONDROVÁ, N. ed. *Dva dny s didaktikou matematiky 2015: Sborník.* Praha: PedF UK, in print.

NOVOTNÁ, Jarmila, Petr EISENMANN a Jiří PŘIBYL. Impact of heuristic strategies on pupils' attitudes to problem solving. In HOUŠKA, M., I. KREJČÍ a M. FLÉGL, eds. *Proceedings of Efficiency and Responsibility in Education 2014.* Praha: Česká zemědělská univerzita, 2014, s. 514–520.

NOVOTNÁ, Jarmila, Petr EISENMANN a Jiří PŘIBYL. Analogy – a friend or fiend when solving math problems? In: TAN, D., ed. *Engineering Technology, Engineering Education and Engineering Management: Proceedings of the International Conference on Engineering Technologies, Engineering Education and Engineering Management (ETEEEM 2014), Hong Kong, 15-16 November 2014.* CRC Press, 2015a, s. 103–108.

NOVOTNÁ, Jarmila, Petr EISENMANN a Jiří PŘIBYL. Impact of heuristic strategies on pupils' attitudes to problem solving. *ERIES Journal*, 2015b, **8**(1), 15–23.

NOVOTNÁ, Jarmila, Petr EISENMANN a Jiří PŘIBYL. Are heuristic strategies a domain only for gifted pupils? In: KREJČÍ, I., M. FLÉGL a M. HOUŠKA, eds. *Proceedings of Efficiency and Responsibility in Education 2015.* Praha: Česká zemědělská univerzita, 2015c, s. 406–413.

NOVOTNÁ, Jarmila, Petr EISENMANN, Jiří PŘIBYL, Jiřina ONDRUŠOVÁ a Jiří BŘEHOVSKÝ. Problem solving in school mathematics based on heuristic strategies. *ERIES Journal*, 2013, **7**(1), 1–6.

PŘIBYL, Jiří a Petr EISENMANN. Properties of problem solving strategies. In: HOUŠKA, M., I. KREJČÍ, a M. FLÉGL, eds. *Proceedings of Efficiency and Responsibility in Education 2014.* Praha: Česká zemědělská univerzita, 2014, s. 623–630.

PŘIBYL, Jiří a Jiřina ONDRUŠOVÁ. Zavedení pomocného prvku – užitečná heuristická strategie. *Matematika, fyzika, informatika*, 2014, **23**(2), 95–105.

Reference

BEN-ZEEV, Talia. When Erroneous Mathematical Thinking Is Just as „Correct“: The Oxymoron of Rational Errors. In: STERNBERG, R. S. a T. BEN-ZEEV, eds. *The Nature of Mathematical Thinking.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1996, s. 55–79.

BOMAN, Eugene C. False Position, Double False Position and Cramer's Rule. *The College Mathematics Journal*, 2009, **40**(4), 279–283.

BROUSSEAU, Guy. *Theory of Didactical Situations in Mathematics.* New York: Kluwer Academic Press, 2002.

BROUSSEAU, Guy. *Úvod do teorie didaktických situací v matematice.* Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2012.

BRUDER, Regina a Wilhelm WEISSKIRCH. *CAliMERO-Computer-Algebra im Mathematikunterricht: Entdecken, Rechnen, Organisieren.* Münster: Westfälische Wilhelms-Universität, 2007.

CALDA, Emil. *Pedagogické zásady a termíny va výuce M & F.* Praha: Prometheus, 2003.

CARLSON, Marilyn P. a Irene BLOOM. The Cyclic Nature of Problem Solving: An Emergent Multidimensional Problem-Solving Framework. *Educational Studies in Mathematics*, 2005, **58**(1), 45–75.

CIHLÁŘ, Jiří a Milan ZELENKA. *Matematika 8: učebnice.* Praha: Pythagoras, 1998.

CIHLÁŘ, Jiří, Eva LESÁKOVÁ, Eva ŘÍDKÁ a Milan ZELENKA. *Očekávané výstupy v RVP ZV z matematiky ve světle testových úloh.* Praha: ÚIV, 2007.

CLARKE, David, Merrilyn GOOS a Will MORONY. Problem solving and working mathematically: an Australian perspective. *ZDM Mathematics Education*, 2007, **39**(5), 475–490.

DAVIDSON, Janet E. Insights about Insightful Problem Solving. In: DAVIDSON, J. E. a R. J. STERNBERG, eds. *The Psychology of Problem Solving.* Cambridge: Cambridge University Press, 2003, s. 149–175.

DAVIDSON, Janet E., Rebecca DEUSER a Robert J. STERNBERG. The Role of Metacognition in Problem Solving. In: METCALFE, J. a A. P. SHIMAMURA, eds. *Metacognition: Knowing about Knowing.* Cambridge: MIT Press, 1994, s. 207–226.

EISENMANN, Petr a Jiří BŘEHOVSKÝ. Vypuštění podmínky – užitečná heuristická strategie. *Matematika – Fyzika – Informatika*, 2013, **22**(3), 183–191.

ENGEL, Arthur. *Problem-Solving Strategies.* New York: Springer-Verlag, 1998.

EYSENCK, Hans J. *The structure and measurement of intelligence.* New York: Springer-Verlag, 1979.

FERRARI, Pier Luigi. Aspects of Hypothetical Reasoning in Problem Solving. In: PONTE, J. P., J. F. MATOS, J. M. MATOS a D. FERNANDES, eds. *Mathematical Problem Solving and New Information Technologies: Research in Contexts of Practice.* Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1992, s. 125–136.

FISCHER, Astrid. Zwischen bestimmten und unbestimmten Zahlen – Zahl- und Variablenauffassungen von Fünftklaesslern. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 2009, **30**(1), 3–29.

FRIDMAN, Lev Moisejevič a Jevsej Naumovič TURECKIJ. *Kak naučiťsja rešať zadači.* Moskva: Prosveščenie, 1989.

HALMOS, Paul R. Jádro matematiky. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, 1982, **27**(5), 273–281.

HAYES, John R. *The Complete Problem Solver.* Philadelphia, Pennsylvania: The Franklin Institute, 1981.

HECHT, Tomáš a Zita SKLENÁRIKOVÁ. *Metódy riešenia matematických úloh.* Bratislava: Slovenské pedagogické nakladatelstvo, 1992.

HEINZE, Astrid. Differences in problem solving strategies of mathematically gifted and non-gifted elementary students. *International Education Journal*, 2005, **6**(2), 175–183.

HEJNÝ, Milan a kolektiv. *Teória vyučovania matematiky 2.* Bratislava: Slovenské pedagogické nakladatelstvo, 1990.

HERMAN, Jiří, Radan KUČERA a Jaromír ŠIMŠA. *Metody řešení matematických úloh I.* Druhé upravené vydání. Brno: MU, 2001.

HERMAN, Jiří, Radan KUČERA a Jaromír ŠIMŠA. *Metody řešení matematických úloh II.* Třetí přepracované vydání. Brno: MU, 2004.

HINSLEY, Dan A., John R. HAYES a Herbert A. SIMON. From Words to Equations Meaning and Representation in Algebra Word Problems. In: CARPENTER, P. A. a M. A. JUST, eds. *Cognitive processes in comprehension.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1977, s. 89–106.

HINTIKKA, Jaakko a Unto REMES. *The Method of Analysis: Its Geometrical Origin and Its General Significance.* Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company, 1974.

HITE, Shayne. *Improving problem solving by improving reading skills.* Grant: University of Nebraska-Lincoln, 2009. Summative Projects for MA Degree.

HOUSKA, Jan a kolektiv. *Cvičení z matematiky pro I. a II. ročník gymnázií.* Praha, SPN: 1985.

HRABAL, Vladimír st. a Vladimír HRABAL ml. *Pedagogickopsychologická diagnostika žáka s úvodem do diagnostické aplikace statistiky.* Praha: Karolinum, 2002.

HRABAL, Vladimír, František MAN a Isabella PAVELKOVÁ. *Psychologické otázky motivace ve škole.* Praha: SPN, 1989.

HRUBÝ, Dag. *Matematická cvičení pro střední školy.* Praha: Prometheus, 2008.

CHABERT, Jean-Luc (Ed.). *A History of Algorithms: From the Pebble to the Microchip.* Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1999.

CHAMBERLIN, Scott A. a Sidney M. MOON. Model-eliciting activities as a tool to develop and identify creatively gifted mathematicians. *The Journal of Secondary Gifted Education*, 2005, **XVII**(1), 37–47.

JAROŠ, Petr. Příklad č.: 5923. *SbírkaPříkladů.eu* [online]. Dostupné z: `http://sbirkaprikladu.eu/p/5923`

JEŘÁBEK, Jaroslav, Romana LISNEROVÁ, Adriena SMEJKALOVÁ a Jan TUPÝ. *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání: (verze platná od 1. 9. 2013) úplné znění upraveného RVP ZV.* Praha: MŠMT, 2013. [online]. Dostupné z: `http://www.msmt.cz/file/29397/`

KLINE, Paul. *The handbook of psychological testing.* London and New York: Routledge, 2000.

KOMAN, Milan a Marie TICHÁ. Řešíme úlohy o nákupech, cenách, zisku. *Matematika – fyzika – informatika*, 1995, **5**(3,4), 113–117, 172–177.

KOMAN, Milan a Marie TICHÁ. Cestování – čas – peníze. *Matematika – fyzika – informatika*, 1996a, **5**(5,6), 227–232, 281–284.

KOMAN, Milan a Marie TICHÁ. Jedeme na výlet – vlakem, autobusem, možná i jinak. *Matematika – fyzika – informatika*, 1996b, **5**(8,9), 399–406, 449–454.

KOPKA, Jan. *Hrozny problémů ve školské matematice.* Ústí nad Labem: Univerzita J. E. Purkyně v Ústí nad Labem, 1999.

KOPKA, Jan. *Umění řešit matematické problémy.* Praha: RNDr. Karel Hoza – HAV, 2013.

KOPKA, Jan a Jiřina ONDRUŠOVÁ. Working Backwards – Heuristic Strategy. In: *International Conference Presentation of Mathematics '14.* Liberec: Technical University of Liberec, 2014, 139–143.

KUŘINA, František. *Problémové vyučování v geometrii.* Praha: SPN, 1976.

KUŘINA, František. *Umění vidět v matematice.* Praha: SPN, 1990.

KUŘINA, František. Řešení úloh a vyučování matematice. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, 1985, **30**(4), 220–226.

KUŘINA, František. Matematika je řešení úloh. *Matematika – Fyzika – Informatika*, 2003a, **13**(3), 129–142.

KUŘINA, František. *Je možné naučit řešit úlohy?* Hradec Králové: Univerzita Hradec Králové, 2003b.

KUŘINA, František. *Matematika a řešení úloh.* České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2011.

LARSON, Loren C. *Problem-Solving Through Problems.* New York: Springer-Verlag, 1983.

LARSON, Loren C. *Metódy riešenia matematických problémov.* Bratislava: ALFA, 1990.

LESTER, Frank K. Jr., Joe GAROFALO a Diana Lambdin KROLL. *The Role of Metacognition in Mathematical Problem Solving: A Study of Two Grade Seven Classes. Final Report.* Bloomington: Indiana Univ., 1989.

MALÁČ, Jaromír a Josef Kurfürst. *Zajímavé úlohy z učiva matematiky ZŠ.* Praha: SPN, 1981.

MAREŠ, Jiří. Fridmanova teorie učebních úloh. *Pedagogika*, 1980, **30**(5), 595–610.

MARSHALL, Sandra P. *Schemas in Problem Solving.* Cambridge: Cambridge University Press, 1985.

MASON, John. Researching Problem Solving from the Inside. In: PONTE, J. P., J. F. MATOS, J. M. MATOS a D. FERNANDES, eds. *Mathematical Problem Solving and New Information Technologies: Research in Contexts of Practice.* Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1992, s. 17–36.

MEADOR, Karen S. (1997). *Creative thinking and problem solving for young learners.* Englewood: Teacher Ideas Press, 1997.

MICHALEWICZ, Zbigniew a David B. FOGEL. *How to Solve It: Modern Heuristics.* Berlin: Springer-Verlag, 2000.

NADJAFIKHAH, Mehdi, Narges YAFTIAN a Shahmaz BAKHSHALIZADEH. Mathematical creativity: some definitions and characteristics. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, 2012, **31**, 285–291.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS [NCTM]. *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc., 2000.

Názvy a značky školské matematiky. Praha: SPN, 1988.

NEWTON, Isaac. *Arithmetica Universalis; Sive de Compositione et Resolutione Arithmetica Liber.* 1707.

ODVÁRKO, Oldřich. Slovní úlohy, aplikační úlohy a pseudoaplikace. *Matematika – fyzika – informatika*, 1996a, **5**(7), 337–340.

ODVÁRKO, Oldřich, Emil CALDA, Jaroslav ŠEDIVÝ a Stanislav ŽIDEK. *Metody řešení matematických úloh.* Praha: SPN, 1990.

OFIR, Ron a Abraham ARCAVI. Word Problems and Equations: An Historical Activity for the Algebra Classroom. *The Mathematical Gazette*, 1992, **76**(475), 69–84.

PAPE, Stephen J. Middle school children's problem-solving behavior: A cognitive analysis from a reading comprehension perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 2004, **35**(3), 187–219.

PAVELKOVÁ, Isabella. *Motivace žáků k učení: Perspektivní orientace žáků a časový faktor v žákovské motivaci.* Praha: UK, 2002.

PÓLYA, George. *Mathematics and Plausible Reasoning: Vol. I Induction and Analogy in Mathematics.* Princeton: Princeton University Press, 1954.

PÓLYA, George. *Mathematics and Plausible Reasoning: Vol. II Patterns of Plausible Reasoning.* Princeton: Princeton University Press, 1968.

PÓLYA, George. *Mathematical Discovery: On Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving*. Combinated edition. New York: John Wiley and Sons, 1981.

PÓLYA, George. *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method.* Expanded Princeton Science Library Edition, with a new foreword by John H. Conway. Princeton and Oxford: Princeton University Press, 2004.

POSAMENTIER, Alfred S. a Stephen KRULIK. *Problem-Solving Strategies for Efficient and Elegant Solutions: A Resource for the Mathematics Teacher*. Thousand Oaks, California: Corwin Press, Inc., 1998.

POSAMENTIER, Alfred S. a Charles T. SALKIND. *Challenging Problems in Geometry.* New York: Dower Publications, Inc., 1988.

PRETZ, Jean E., Adam J. NAPLES a Robert J. STERNBERG. Recognizing, Defining, and Representing Problems. In: DAVIDSON, J. E. a R. J. STERNBERG, eds. *The Psychology of Problem Solving.* Cambridge: Cambridge University Press, 2003, s. 3–30.

RAAHEIM, Kjell a Wibecke BRUN. Task novelty and intelligence. *Scandinavian Journal of Psychology,* 1985, **26**, 35–41.

REISS, Kristina a Günter TÖRNER. Problem solving in the mathematics classroom: the German perspective. *ZDM Mathematics Education*, 2007, **39**, 431–441.

ROBERTSON, Ian S. *Problem Solving.* Philadelphia: Psychology Press, 2001.

SAK, Uguk a C. June MAKER. Divergence and convergence of mental forces of children in open and closed mathematical problems. *International Education Journal*, 2005, **6**(2), 252–260.

SCHOENFELD, Alan H. *Episodes and Executive Decisions in Mathematical Problem Solving.* 1981. [online]. Dostupné z: `http://eric.ed.gov/?id=ED201505`

SCHOENFELD, Alan H. *Expert and Novice Mathematical Problem Solving: Final Project Report and Appendices B–H.* Clinton, N.Y.: Hamilton College, 1982.

SCHOENFELD, Alan H. *Problem Solving in the Mathematics Curriculum: A Report, Recommendations, and an Annotated Bibliograaphy.* Washington, D.C.: Mathematical Association of America, 1983.

SCHOENFELD, Alan H. *Mathematical Problem Solving.* Orlando, Florida: Academic Press, Inc. 1985.

SCHOENFELD, Alan H. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In: GROUWS, D. A. ed. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York: Macmillan, 1992, s. 334–370. [online]. Kopie s jiným stránkováním, na které se odkazuji ve své práci je dostupná z: `http://hplengr.engr.wisc.edu/Math_Schoenfeld.pdf`

SMITH, David Eugene. *A Source Book in Mathematics: Volume One, Volume Two.* An unabridged and unaltered republication of the First Edition (1929). New York: Dover Publications, Inc., 1959.

Slovník školské matematiky. Praha: SPN, 1981.

STERNBERG, Robert J. Creativity or creativities? *International Journal of Human-Computer Studies*, 2005, **63**(4–5), 370–382.

ŠTECH, Stanislav. Když je kurikulární reforma evidence-less. *Pedagogická orientace*, 2013, **23**(5), 615–633.

TAO, Terence. *Solving Mathematical Problems: A Personal Perspective.* Oxford: Oxford University Press, 2006.

TRÁVNÍČEK, S. Matematické úlohy jako součást literárních textů. *Matematika – fyzika – informatika*, 1996, **6**(3,4), 113–120, 169–178.

VYŠÍN, Jan. *Metodika řešení matematických úloh.* Praha: SPN, 1972.

VYŠÍN, Jan. *Štyri kapitoly o problémovom vyučovaní matematiky.* Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1978.

WENKE, Dorit, Peter A. FRENSCH a Joachim FUNKE. Complex problem solving and intelligence. In STERNBERG, R. J. a J. E. PRETZ, eds. *Cognition and Intelligence: Identifying the Mechanisms of the Mind.* Cambridge: Cambridge University Press, 2005, s. 160–187.

WICKELGREN, Wayne A. *How to Solve Mathematical Problems.* New York: Dover Publications, Inc., 1995.

WINICKI, Greisy. The Analysis of Regula Falsi as an Instance for Professional Development of Elementary School Teachers. In: KATZ, V. ed. *Using History to Teach Mathematics: An Internation Perspective.* Washington, D.C.: Mathematical Association of America, 2000, s. 129–133.

WILSON, James W., Maria L. FERNANDEZ a Nelda HADAWAY. Mathematical Problem Solving. In: WILSON, P. S. ed. *Research Ideas for the Classroom: High School Mathematics.* New York: Macmillan Publishing Company, 1993, s. 57–78.

ZEITZ, Paul. *The Art and Craft of Problem Solving.* Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2007.

ZHOUF, Jaroslav. *Tvorba matematických problémů pro talentované žáky.* Praha: UK, 2010.

Bibliografie

HEJNÝ, Milan a František KUŘINA. *Dítě, škola a matematika: Konstruktivistické přístupy k vyučování.* Praha: Portál, 2001.

JANČAŘÍK, Antonín. *Algorithms and Solving Strategies.* Praha: UK, 2007.

JONASSEN, David H. *Learning to Solve Problems: A Handbook for Designing Problem-Solving Learning Environments.* New York, NY: Routledge, 2011.

KAUR, Berinderjeet, Yeap Ban HAR a Manu KAPUR, eds. *Mathematical Problem Solving: Yearbook 2009.* Singapore: National Institute of Education, 2009.

KONFOROVIČ, Andrej G. *Významné matematické úlohy.* Praha: SPN, 1989.

KORDĚMSKIJ, Boris A. *Matematické prostocviky.* Praha: Mladá fronta, 1957.

KOWALSKI, Robert. *Logic for Problem Solving.* Amsterdam: Elsevier Science Publishing Co., Inc., 1979.

LEHOCZKY, Sandor a Richard RUSCZYK. *The Art of Problem Solving: Volume 1: The Basics.* Alpine: AoPS, Inc., 2011.

MADSEN, Kristen B. *Teorie motivace: Srovnávací studie moderních teorií motivace.* Praha: Academia, 1972.

MADSEN, Kristen B. *Moderní teorie motivace.* Praha: Academia, 1979.

MIKOVÁ, Šárka a Jiřina STANG. *Typologie osobnosti u dětí.* Portál: Praha, 2010.

NAKONEČNÝ, Milan. *Motivace lidského chování.* Praha: Academia, 1997.

PŘÍHONSKÁ, Jana. *Metody řešení úloh – MX2M.* 2013.
Dostupné z: `https://kmd.fp.tul.cz/images/stories/vyuka/prihonska-mat_pro_praxi2/P1_METODY%20RESENI%20ULOH.pdf`

RUSCZYK, Richard a Sandor LEHOCZKY. *The Art of Problem Solving: Volume 2: And Beyond.* Alpine: AoPS, Inc., 2013.

SIMON, Herbert A. a Allen NEWELL. Heuristic Problem Solving: The Next Advance in Operations Research. *Operations Research*, 1958, **6**(1), 1–10. Dostupné z: `http://www.jstor.org/stable/167397`

SIMON, Herbert A. a Allen NEWELL. Human Problem Solving: The State of the Theory in 1970. *American Psychologist*, 1971, **26**, 145–159.
Dostupné z: `http://www.cog.brown.edu/courses/cg195/pdf_files/fall07/Simon%20and%20Newell%20(1971).pdf`

STERNBERG, Robert J. *Kognitivní psychologie.* Praha: Portál, 2002.

VOLFOVÁ, Marta. *Metody řešení matematických úloh.* Hradec Králové: Gaudeamus, 2000.

VRÁBEL, Peter. *Heuristika a metodológia matematiky.* Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa, 2005.

Přílohy

Příloha 1 – ukázka vstupně-výstupního testu třídy Milana v dlouhodobém experimentu (4 strany)

Příloha 2 – ukázky různých žákovských řešení testů jak z krátkodobého a dlouhodobého experimentu, tak i z experimentu UFP